جامعة الدول العربية

الاتحاد البريدي العربي

كلية البريد العربية

الرياضيات التمهيدية

لدراسة الاقتصاد

للسنة الدراسية الاولى

الدكتور

ممدوح الخطيب الكسواني

استاذ سابق في جامعتي فاس والرباط

مدرس في كلية الاقتصاد والتجارة بجامعة دمشق

١٤٠٣ هجرية ـ ١٩٨٣ ميلادية

تقديم

يسر كلية البريد العربية أن تقدم لطلابها كتاب الرياضيات التمهيدية لدراسة الاقتصاد ومؤلفه الدكتور ممدوح الخطيب الكسواني . ويعد هذا الكتاب ثمرة جهود متواصلة ، وحصيلة خبرة تدريسية طويلة ، ونتيجة لتعاون وطيد بين كليـة البريد العربية وكلية الاقتصاد والتجارة في جامعة دمشق .

ولا نستطيع أن نوفي هذا الكتاب حقه مالم نعرف بمؤلفه وبحياته التدريسية . يحمل المؤلف درجة دكتوراة دولة في العلوم الاقتصادية من جامعة باريس ويختص في الاقتصاد القياسي والرياضي . بـدأ حياتـه التدريسية في الجامعات المغربية حيث قضى فيها اربع سنوات كأستاذ لمقرري الاحصاء الوصفي والاحصاء الرياضي . في أواخر السبعينات ، انتقل الى كلية الاقتصاد والتجارة بجامعة دمشق حيث يقوم حاليـا بتدريس مواد الرياضيات العالية ، والاقتصاد الرياضي ، والاقتصاد القياسي . وللمؤلف كتابان منشوران ، أحدهما في الرياضيات العاليـة والآخر في الاقتصاد الرياضي .

ونظرا لتخصص المؤلف في الاقتصاد الرياضي والرياضيات تدريسا وتأليفا ، فقد حرصت كلية البريد العربية على قيامه بتأليف هذا الكتاب الذي يهدف الى تزويد الطالب بالاساس الرياضي الضروري لتنمية تفكيره السليم وتحليله المنطقي ، ولاعداده لتقبل المناهج الدراسية الاخرى التي تستخدم لغة الرياضيات ورموزها في تحلـل ومناقشـة موضوعاتهـا . لذلك فقد جاء الكتاب شاملا للموضوعات الاساسية التي يحتاجهـا طلاب السنة الاولى ، ووزعت أبحاثه على اثني عشر فصلا ، وعرضت موضوعاته بأسلوب سهل وبصعوبة متدرجة بعيدة عن التعقيد ، فكان الكتاب متكاملا من حيث العرض والمضمون ومنسجما مع الغرض الذي أعد من أجله .

واخيرا اتقدم بالشكر الجزيل للدكتور المؤلف مع تمنياتي له بالمزيد من العطاء العلمي ، وكذلك آمل أن يكون هذا الكتاب ذا فائدة قصوى لطلبة الكلية متمنيا لهم جميعا التفوق والنجاح .

الدكتور المهندس

سعدي يوسف تيلا

عميد كلية البريد العربية

المقدمة

لا يعد استعمال الرياضيات في التحليل الاقتصادي ظاهرة حديثة ، فمنذ عام ١٧٣٩ استخدم برنولي نظرية الالعاب في كتابه حول مفهوم المنفعة ، وفي عام ١٨٣٨ استعان كورنو بالتحليل الرياضي لدراسة ظاهرة تشكل الاسعار ، وفي عام ١٨٤٤ استعمل دوبوي وللمرة الاولى الرسوم البيانية وطبقها على دراسة الاسعار المتمايزة . ولم تبق هذه المحاولات حالات فردية في تاريخ العلوم الاقتصادية ، بل ظهرت في القرن التاسع عشر مدرسة فكرية اقتصادية هي المدرسة الكلاسيكية الجديدة ، اعتمد مفكروها بصورة أساسية على التحليل الرياضي في دراساتهم الاقتصادية. ثم أدى توسع تطبيق الرياضيات في التحليل الاقتصادي الى نشوء الاقتصاد الرياضي كمنهج علمي متميز والاقتصاد القياسي كفرع حديث للعلوم الاقتصادية .

ولم يكن التوسع في تطبيق التحليل الرياضي على الابحاث الاقتصادية نزوة عابرة ، فقد أوضح الاقتصاديون الرياضيون أن العلوم الدقيقة لم تتقدم الا باستخدامها للرياضيات ، وأن على الاقتصاد أن يلجأ الى ذات الوسيلة لكي يحقق تقدما ملموسا ولكي تأخذ أبحاثه طابعا علميا موضوعيا ، أما اللغة الادبية المستخدمة في وصف الظواهر الاقتصادية فلا تتسم بالدقة والوضوح ولا تصلح لمعالجة الحالات العامة المعقدة .

وعلى الرغم من دقة اللغة الرياضية ووضوحها فانها لا تصلح لدراسة الظواهر والعلاقات الاقتصادية جميعا ، فالظواهر الاقتصادية غير القابلة للقياس الكمي ، والعلاقات الاقتصادية التي لا تقبل الصياغة الرياضية ، لا تمكن من تطبيق الاسلوب الرياضي في ترميزها وصياغتها

وتحليل علاقاتها . بالاضافة الى ذلك ، يمتاز السلوك الاجتماعي – الذي يمثل السلوك الاقتصادي أحد جوانبه – بتعقيده وبتشابكه وبعدم خضوعه دائما لمنطق أو نظام ، مما يجعل التعبير عنه برمز أو بعلاقة أو بمعادلة رياضية أمرا في غاية الصعوبة والتعقيد .

ومهما تكن الانتقادات التي وجهت لاستخدام الاسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي وعدم كفايته لمعالجة أبحاثه جميعا ، الا أن هناك اجماعا حول أهمية وفائدة الرياضيات كأسلوب علمي دقيق لعرض الافكار والمبادىء والنظريات الاقتصادية . لذلك لا يوجد في عالمنا المعاصر اقتصادي جدير بهذا الاسم لا يستعمل الرموز الرياضية والصيغ الجبرية والرسوم البيانية في العرض والتحليل والاستنتاج الاقتصادي ، ولكن يستمر النقاش بين الاقتصاديين حول درجة التوسع والتعمق في تطبيق الرياضيات على الابحاث الاجتماعية والاقتصادية وحول مشكلة صياغة السلوك الاقتصادي المعقد بمجموعة من المعادلات والعلاقات الرياضية المجردة .

اما دراسة الرياضيات التمهيدية ضمن اطار هذا الكتاب فتهدف بصورة أساسية الى تزويد الطالب بالاساس الضروري الذي يمكنه من استخدام الاسلوب الرياضي كوسيلة من وسائل البحث والتفكير والتحليل والتركيب في معالجة الموضوعات الاقتصادية المطروحة بأسلوب حديث معاصر . وبذلك يرتبط تدريس الرياضيات باتجاه منهجي في البحث العلمي هدفه تنمية التفكير السليم والتحليل المنطقي والمحاكمة العقلانية للمشاكل الاقتصادية التي تواجه الطالب والباحث أثناء دراسته وخلال حياته العملية والمهنية .

ولا بد من الاشارة الى أن الابحاث الرياضية تشكل حجر الزاوية في الدراسة الحديثة للعديد من المقررات الاقتصادية والاحصائية . فالتحليل الاقتصادي الجزئي والكلي ، والاقتصاد القياسي والرياضي ، والاحصاء وعلوم الحاسبات ، موضوعات تتطلب في تحليلها الحديث أساسيا رياضيا لعرض أبحاثها بلغة العصر وبأسلوب العلم . وعلى هذا فقلما نجد اليوم مؤلفا أو مقالا أو بحثا اقتصاديا يتجاهل لغة الرياضيات ومنطقها في العرض والصياغة والتحليل والمحاكمة ، أما

الاسلوب القديم في دراسة الاقتصاد المبني على الوصف والتحليل الادبيين، فهو أسلوب في طريقه الى الانقراض لعجزه عن مواكبة التقدم العلمي المعاصر ، فاقتصادي اليوم يتكلم ويكتب ويفكر بلغة رياضية سليمة ، ومن لا يتقن هذه اللغة ولا يتحاور بها ، فهو اقتصادي متخلف لا يماشي بتكوينه متطلبات البحث العلمي المعاصر .

تشمل أبحاث هذا الكتاب الموضوعات الرئيسة التالية موزعة على اثني عشر فصلا : القوى والجذور ، اللوغاريتمات ، الحساب التوافقي وثنائي الحدين ، نظرية المجموعات ، الاحتمالات ، المتوالية العددية والمتوالية الهندسية ، المعادلات والمتراجحات ، مفاهيم اساسية في التوابع ، دراسة تحولات التوابع ورسم خطوطها البيانية ، التفاضل ، المصفوفات والمحددات . وقد عرضنا هذه الموضوعات بأسلوب سهل بعيد عن التعقيد ، يتماشى مع التكوين الادبي لبعض الطلبة ، وأوردنا البراهين الرياضية بصورة مبسطة ، وختمنا كل موضوع بالعديد من التطبيقات العملية ، كما اننا استخدمنا في عرض الموضوعات والبراهين الرموز الرياضية باللغة العربية ايمانا منا بقدرة هذه اللغة على مواكبة التقدم العلمي المعاصر .

ونحن اذ نقدم هذا الكتاب ، لنأمل أن يكون لبنة متواضعة تساهم في تشييد صرح المكتبة العلمية العربية ، وتساعد الطالب والباحث في أقطار العالم العربي كافة ، على الاستزادة من العلم والمعرفة الضروريين لكل تقدم علمي وازدهار حضاري .

والله ولي التوفيق

دمشق ، في ١٩٨٣/١/٨

الدكتور
ممدوح الخطيب الكسواني

الفصل الأول

القــوى والجــذور

تهدف دراسة القوى والجذور توضيح بعض القواعد العمليـة المستخدمة في العمليات الحسابية والجبرية • سندرس عـلى التوالـي القوى والقواعد المطبقة في حسابها ثم نعرف الجذور والقواعد المطبقة في حسابها ، وبذلك يشمل هذا الفصل البحثين التاليين :

البحث الاول : القوى أو الاسس •

البحث الثاني : الجذور •

البحث الأول

القــوى أو الاسس

أولا ـ تعريف :

ليكن ب عدد حقيقي (ب ∈ ح) و ن عدد حقيقي (ن ∈ ح) ، نسمي العملية التي تربط بين كل عددين (ب ، ن) والعدد (حـ) المساوي الى :

$$\text{حـ} = \underbrace{\text{ب} \times \text{ب} \times \cdots \times \text{ب}}_{\text{ن مرة}} = \text{ب}^{\text{ن}}$$

بعمليــة الرفع الى قوة ، أو اختصارا بعملية القوى حيث يساوي العدد حـ الى مضروب العدد ب بنفسه (ن) مرة • فاذا كان ب = ٧ و ن = ٦ ، فــان :

$$\text{حـ} = ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ = ٧^{٦} = ١١٧٦٤٩$$

نسمي العدد ب بالاساس ، والعدد ن بالأس أو القوة ، ولا تكون عملية القوى ذات مغزى الا عندما يكون ب ≠ . (العدد ب لايساوي الصفر) • وبصورة خاصة ، اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً ، وكان الاساس (ب) موجباً أيضاً فان (حـ) يكون بالتالي موجباً ، أما اذا كان (ن) عدداً موجباً والاساس (ب) عدداً سالباً فيكون (حـ) عدداً موجباً اذا كانت القوة زوجية (ن عدد زوجي) وسالباً اذا كانت القوة فردية (ن عدد فردي) •

مثال : اذا كان ب = (ـ ٨) ، و (ن) = ٤ حيث ن عدد زوجي،

فان حـ = (ـ ٨) (ـ ٨) (ـ ٨) (ـ ٨) = ٤٠٩٦

أما اذا كان ن = ٥ حيث ن عدد فردي فان :

حـ = (ـ ٨) (ـ ٨) (ـ ٨) (ـ ٨) (ـ ٨) = ـ ٣٢٧٦٨

ثانيا ـ القواعد المطبقة في حساب القوى :

هذا ويمكن تلخيص قواعد القوى بالاعتماد على النظريات والقواعد التالية :

القاعدة (١) :

يساوي جداء عدد من القوى لها أساس واحد (ب) الى ذلك الاساس مرفوعاً الى قوة جديدة تساوي الى مجموع أسس (جمع أس) القوى الخاضعة لعملية الضرب •

مثال : $٦^{٣} \times ٦^{٢} \times ٦^{٤} =$ (٦×٦×٦) (٦×٦) (٦×٦×٦×٦)

$= ٦ \times ٦ \times \cdots \times ٦ = ٦^{٣+٢+٤} = ٦^{٩}$

وبشكل عام فان :

$ب^{ن} \cdot ب^{م} \cdot ب^{ل} = ب^{ن+م+ل}$

في الحقيقة : $ب^{ن} \cdot ب^{م} \cdot ب^{ل} =$

$\underbrace{(ب \times ب \times \cdots \times ب)}_{ن\ مرة} \underbrace{(ب \times ب \times \cdots \times ب)}_{م\ مرة} \underbrace{(ب \times ب \times ب \cdots \times ب)}_{ل\ مرة}$

يتضمن القوس الاول مضاريباً للعدد ب مقدارها ن مرة ، والقوس الثاني مضاريباً للعدد ب مقدارها م مرة ، والقوس الثالث مضاريباً للعدد ب مقدارها ل مرة • وبالتالي تتضمن الاقواس الثلاث مضاريباً للعدد ب يساوي مجموعها الى ن + م + ل • أي أن الطرف الثاني من المساواة يساوي حسب تعريف القوى للعدد ب مرفوعاً للقوة ن + م + ل •

القاعدة (٢) :

يساوي العدد الناتج من رفع عدد ما ($ب^{ن}$) الى قوة جديدة م الى الاساس ب مرفوعاً الى قوة تساوي الى جداء القوتين أي

$$(ب^{ن})^{م} = ب^{ن \times م}$$

مثال : $(٤^{٢})^{٣} = ٤^{٢ \times ٣} = ٤^{٦}$

$$(٤^{٢})^{٣} = ٤^{٢} \times ٤^{٢} \times ٤^{٢} = ٤^{٢+٢+٢} = ٤^{٦}$$

وبصورة عامة فان :

$$(ب^{ن})^{م} = \underbrace{ب^{ن} \times ب^{ن} \times \cdots \times ب^{ن}}_{\text{م مرة}}$$

وحسب الخاصة السابقة فان جمع القوى ن التي عددها م يساوي ن × م أي :

$$ب^{ن} \times ب^{ن} \times \cdots \times ب^{ن} = ب^{ن \times م}$$

القاعدة (٣) :

يساوي العدد الناتج من رفع عدد من المضاريب الى قوة ما الى جداء هذه الاعداد بعد رفع كل منها الى تلك القوة :

مثال : $(٣ \times ٥ \times ٢)^{٤} = ٣^{٤} \times ٥^{٤} \times ٢^{٤}$

وبصورة عامة :

$$(\text{ب} \times \text{ح} \times \text{د})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}} \times \text{ح}^{\text{ن}} \times \text{د}^{\text{ن}}$$

لدينا بالتعريف :

$$(\text{ب} \times \text{ح} \times \text{د})^{\text{ن}} = \underbrace{(\text{ب}\times\text{ح}\times\text{د})\,(\text{ب}\times\text{ح}\times\text{د})\cdots(\text{ب}\times\text{ح}\times\text{د})}_{\text{ن مرة}}$$

$$= \underbrace{(\text{ب}\times\text{ب}\times\cdots\times\text{ب})}_{\text{ن مرة}}\underbrace{(\text{ح}\times\text{ح}\times\cdots\times\text{ح})}_{\text{ن مرة}}\underbrace{(\text{د}\times\text{د}\times\cdots\times\text{د})}_{\text{ن مرة}}$$

$$= \text{ب}^{\text{ن}} \times \text{ح}^{\text{ن}} \times \text{د}^{\text{ن}}$$

وبشكل خاص فان :

$$(\text{ب}^{\text{م}} \times \text{ح}^{\text{ق}} \times \text{د}^{\text{ل}})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{م}\times\text{ن}} \times \text{ح}^{\text{ق}\times\text{ن}} \times \text{د}^{\text{ل}\times\text{ن}}$$

القاعدة (٤) :

يساوي الكسر العادي $\frac{\text{ب}}{\text{ح}}$ المرفوع الى القوة ن الى حاصل قسمة صورة الكسر على مخرجه بعد رفع كل منهما الى القوة ن ، أي

$$\left(\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\text{حـ}^{\text{ن}}}$$

مثال :

$$\left(\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}\right)^{\text{ن}} = \underbrace{\frac{\text{ب}}{\text{حـ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} \times \cdots \times \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}}_{\text{ن مرة}}$$

$$= \frac{\text{ب}\times\text{ب}\times\cdots\times\text{ب}}{\text{حـ}\times\text{حـ}\times\cdots\times\text{حـ}} = \frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\text{حـ}^{\text{ن}}}$$

وبصورة خاصة ، اذا كانت صورة الكسر ومخرجه مشتركان بالاساس ، فيمكن التأكيد على العلاقات التالية :

$$\frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{م}}} = \frac{\text{ب}\times\text{ب}\times\cdots\times\text{ب}(\text{ن مرة})}{\text{ب}\times\text{ب}\times\cdots\times\text{ب}(\text{م مرة})} = \text{ب}^{\text{ن}-\text{م}}$$

فاذا كان ن > م فتكون القوة الناتجة موجبة أي ن ــ م > ٠

واذا كان ن < م فتكون القوة الناتجة سالبة أي ن ــ م < ٠

واذا كان ن = م فتكون القوة الناتجة مساوية للصفر أي ن ــ م = ٠

أي في الحالة الاخيرة

$$\frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = \text{ب}^{\text{ن}-\text{ن}} = \text{ب}^{٠} = ١$$

وهذا يعني أن أي عدد (لا يساوي للصفر) مرفوع الى القوة صفر يساوي الى الواحد الصحيح •

ونستنتج باستخدام العلاقة السابقة أي $\text{ب}^{\cdot} = ١$ أن :

$$\frac{١}{\text{ب}^{\text{م}}} = \frac{\text{ب}^{\cdot}}{\text{ب}^{\text{م}}} = \text{ب}^{\cdot - \text{م}} = \text{ب}^{-\text{م}}$$

أي أنه بالامكان استبدال الاس الموجب في مخرج الكسر بأس سالب في صورته :

مثـــال :

$$\frac{٢٥^{٦}}{٢٥^{٤}} = ٢٥^{٦ - ٤} = ٢٥^{٢}$$

$$\frac{١٣^{٥}}{١٣^{٨}} = ١٣^{٥ - ٨} = ١٣^{-٣}$$

$$\frac{١٥^{٧}}{١٥^{٧}} = ١٥^{٧ - ٧} = ١٥^{\cdot} \therefore = ١$$

$$\frac{١}{١٤^{٣}} = \frac{١٤^{\cdot}}{١٤^{٣}} = ١٤^{\cdot - ٣} = ١٤^{-٣}$$

تطبيقات عملية

آ ـ احسب ما يلي بالاعتماد على خواص القوى :

$$(٣)^{٢} = ٣ \times ٣ = ٩$$

$$(٣)^{٥} = (٣)^{٢} \times (٣)^{٣} = ٩ \times ٢٧ = ٢٤٣$$

$$(٣)^{٧} = (٣)^{٥} \times (٣)^{٢} = ٢٤٣ \times ٩ = ٢١٨٧$$

$$(٣)^{١٠} = \left(٣^{٥}\right)^{٢} = (٢٤٣)^{٢} = ٥٩٠٤٩$$

$$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٠} = \frac{(٢)^{١٠}}{(٣)^{١٠}} = \frac{١٠٢٤}{٥٩٠٤٩}$$

$$\left(\frac{١}{٤}\right)^{٥} = \left(\frac{١}{٢^{٢}}\right)^{٥} = \frac{١}{(٢)^{١٠}} = \frac{١}{١٠٢٤}$$

$$\left(\frac{١}{٣}\right)^{٧} = \frac{١}{(٣)^{٧}} = \frac{١}{٢١٨٧}$$

$$\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٥} = \frac{(٣)^{٥}}{(٤)^{٥}} = \frac{(٣)^{٥}}{(٢)^{١٠}} = \frac{٢٤٣}{١٠٢٤}$$

$$\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٤} = \frac{(٥)^{٤}}{(٢)^{٤}} = \frac{٦٢٥}{١٦}$$

$$\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٣} = \frac{(٥)^{٣}}{(٧)^{٣}} = \frac{١٢٥}{٣٤٣}$$

$$\left(\frac{١}{٨}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٢^{٣}}\right)^{٤} = \frac{١}{(٢)^{١٢}} = \frac{١}{٤٠٩٦}$$

$$\left(\frac{٩}{٤}\right)^{٣} = \left(\frac{(٣^{٢})}{(٢^{٢})}\right)^{٣} = \frac{٣^{٦}}{٢^{٦}} = \frac{٧٢٩}{٦٤}$$

ب ـ احسب اعتماداً على خواص القوى الصيغ التالية :

$$(٠٫٢٥)^{-٠٫٥} = \left(\frac{١}{٤}\right)^{-٠٫٥} = \left(\frac{١}{\frac{١}{٤}}\right)^{٠٫٥} = (٤)^{٠٫٥} = ٤^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$$

$$(١٦)^{-١٫٧٥} = \left(\frac{١}{١٦}\right)^{١٫٧٥} = \left(\frac{١}{٢^{٤}}\right)^{١٫٧٥} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٧} = \frac{١}{١٢٨}$$

$$\left(\frac{١}{٣٢}\right)^{-١٫٢} = \left(\frac{١}{\frac{١}{٣٢}}\right)^{١٫٢} = (٣٢)^{١٫٢} = (٢^{٥})^{١٫٢} = ٢^{٦} = ٦٤$$

$$(٧١٩)^{\frac{٢}{٣}} = (٣^{٦})^{\frac{٢}{٣}} = (٣)^{\frac{١٢}{٣}} = ٣^{٤} = ٨١$$

$$(٣١٢٥)^{٠٫٦} = (٥^{٥})^{٠٫٦} = (٥)^{٣} = ١٢٥$$

البحث الثاني

الجـــذور

اولا ـ تعريف :

عندما تكون قوة الاساس كسراً عادياً فيمكن الانتقال من عملية القوى الى عملية الجذر حيث تعد هذه العملية مقلوباً من جهة اليسار لعملية الرفع الى قوة ، فاذا كان :

$$حـ = ب^{ن}$$

$$\text{فان } حـ^{\frac{1}{ن}} = ب$$

وهكذا فان الجذر النوني للعدد حـ هو العدد الذي لو رفع الـى القوة ن لاصبح مساويا الى حـ :

$$\sqrt[ن]{حـ} = حـ^{\frac{1}{ن}} = ب$$

مثال : الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥ هو العدد ٥ لان :

$$\sqrt[٣]{١٢٥} = ١٢٥^{\frac{١}{٣}} = ٥$$

ثانيا ـ القواعد المطبقة في حساب الجذور :

ومن الممكن تلخيص خواص الجذور بالاعتماد على القواعد التالية :

قاعدة (١) :

يساوي جداء الجذور النونية لعدة أعداد الجذر النوني لجدائها :

مثال :

$$\sqrt[٣]{٩} \times \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٩ \times ٢٧ \times ١٢٥}$$

وبشكل عام فان :

$$\sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{ج} \times \sqrt[ن]{د} = \sqrt[ن]{ب \times ج \times د}$$

ويبرهن على ذلك برفع طرفي العلاقة الى القوة ن فيكون :

$$ب \times ج \times د = ب \times ج \times د$$

قاعدة (٢) :

لرفع الجذر النوني لعدد ما الى القوة (م) ، يكفي رفع العدد المجذور الى القوة (م) .

مثال :

$$\left(\sqrt[٣]{٦٤}\right)^{٢} = \sqrt[٣]{(٦٤)^{٢}} = ١٦$$

وبصورة عامة فان :

$$\left(\sqrt[ن]{ب}\right)^{م} = \sqrt[ن]{ب^{م}}$$

يمكن وضع الطرف الاول من المساواة بالشكل :

$$\left(\sqrt[ن]{ب}\right)^{م} = \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{ب} \times \ldots \times \sqrt[ن]{ب} \quad (\text{م مرة})$$

وبالاستناد الى القاعدة الاولى يكون :

$$\sqrt[ن]{\underbrace{ب \times ب \times \ldots \times ب}_{\text{م مرة}}} = \sqrt[ن]{ب^{م}}$$

قاعـدة (٣) :

يساوي الجذر الميمي للجذر النوني لعدد ما الى الجذر مـن القوة م × ن لذلك العدد . مثال :

$$\sqrt[٣]{\sqrt[٢]{٧٢٩}} = \sqrt[٢\times٣]{٧٢٩} = \sqrt[٦]{٧٢٩} = ٣$$

وبصورة عامـة :

$$\sqrt[م]{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[م\times ن]{ب}$$

ونستطيع البرهان على صحة هذه العلاقة برفع طرفيها الى القوة م ، فيكون :

$$\sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{ب}$$

قاعــدة (٤) :

يساوي حاصل قسمة الجذرين النونيين لعددين للجذر النوني لحاصل قسمة العددين •

مثال :

$$\frac{\sqrt[٣]{١٢٥}}{\sqrt[٣]{٢٧}} = \sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٢٧}}$$

وبصورة عامة :

$$\frac{\sqrt[ن]{ب}}{\sqrt[ن]{جـ}} = \sqrt[ن]{\frac{ب}{جـ}}$$

ويبرهن على صحة هذه العلاقة برفع طرفيها الى القوة (ن) •

قاعــدة (٥) :

لا تتبدل قيمة الجذر اذا ضربنا أو قسمنا دليل الجذر وأس العدد المجذور بعدد واحد •

مثال :

$$\sqrt[٣]{٤^{٢}} = \sqrt[٩]{٤^{٦}}$$

وبصورة عامة :

$$\sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن \times م]{ب^{م}}$$

و

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ن} \times \text{م}]{\text{ب}^{\text{ق} \times \text{م}}}$$

فاذا رفعنا طرفي العلاقة الى القوة ن فيكون :

$$\text{ب}^{\text{ق}} = \sqrt[\text{م}]{\text{ب}^{\text{ق} \times \text{م}}}$$

ثم الى القوة م فيكون :

$$\text{ب}^{\text{ق} \times \text{م}} = \text{ب}^{\text{ق} \times \text{م}}$$

قاعدة (٦) :

يمكن كتابة أي عدد ب مرفوع الى قوة كسرية موجبة $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

على أنه الجذر النوني للعدد ب مرفوعا الى القوة م ، أي :

$$\text{ب}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}^{\text{م}}}$$

لنرفع طرفي العلاقة الى القوة ن فيكون :

$$\text{ب}^{\frac{\text{م} \times \text{ن}}{\text{ن}}} = \text{ب}^{\text{م}}$$

أو

$$\text{ب}^{\text{م}} = \text{ب}^{\text{م}}$$

مثال :

$$٢٥^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt[٢]{(٢٥)^{٣}}$$

وبشكل خاص فان :

$$ب^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{ب}$$

مثال :

$$(٢٧)^{\frac{1}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$$

تطبيقات عملية

$$ب^{\frac{1}{٦}} = \sqrt[٦]{ب}$$

$$٣^{\frac{1}{د}} = \sqrt[د]{٣}$$

$$حـ^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{حـ^{٣}}$$

$$(٣٢٦)^{-\frac{1}{٤}} = \frac{1}{(٣٢٦)^{\frac{1}{٤}}} = \frac{1}{\sqrt[٤]{٣٢٦}}$$

$$(ب \,.\, حـ \,.\, د)^{\frac{1}{٣}} = \sqrt[٣]{ب} \,.\, \sqrt[٣]{حـ} \,.\, \sqrt[٣]{د}$$

$$\sqrt[٥]{\frac{٤}{٧}} = \frac{\sqrt[٥]{٤}}{\sqrt[٥]{٧}} = ٤^{\frac{١}{٥}} \times ٧^{-\frac{١}{٥}}$$

$$\sqrt[٣]{\sqrt[٤]{٩}} = \sqrt[١٢]{٩} = ٩^{\frac{١}{١٢}}$$

$$\text{هـ}^{\frac{١}{٢}} \, . \, \text{هـ}^{\frac{١}{٦}} = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٦}} = \text{هـ}^{\frac{٤}{٦}} = \sqrt[٦]{\text{هـ}^{٤}}$$

$$\frac{\text{و}^{\frac{٣}{٢}}}{\text{و}^{\frac{٦}{٥}}} = \text{و}^{\frac{٣}{٢}} \, . \, \text{و}^{-\frac{٦}{٥}} = \text{و}^{\frac{٣}{٢}-\frac{٦}{٥}} = \text{و}^{\frac{٣}{١٠}} = \sqrt[١٠]{\text{و}^{٣}}$$

الفصل الثاني

اللوغاريتمات

يهدف استعمال اللوغاريتمات الى تبسيط العمليات الحسابية لتحويله عملية الضرب الى جمع ، والقسمة الى طرح ، والقوى الى ضرب ، والجذر الى قسمة ، وقد انحسرت أهمية اللوغاريتمات العملية بانتشار الحاسبات الالكترونية التي سهلت القيام بالعمليات الحسابية المعقدة ، وبقي للوغاريتمات أهمية تحليلية نظرية في الابحاث الرياضية.

سنقوم في هذا الفصل بتعريف اللوغاريتم والتذكير بخواصه ، ثم سننتقل لدراسة أسس اللوغاريتمات المستعملة في الحياة العملية وهناك أساسين لوغاريتميين : الاساس العشري والاساس الطبيعي، ثم سنختم العرض بدراسة كيفية استخدام الجداول اللوغاريتمية .

وبذلك سيشمل هذا العرض الابحاث التالية :

البحث الاول : تعريف اللوغاريتم وخواصه .

البحث الثاني : اللوغاريتمات المستعملة .

البحث الثالث : استخدام الجداول اللوغاريتمية .

البحث الاول

تعريف اللوغاريتم وخواصه

سنتناول في هذا البحث تعريف اللوغاريتم وخواصه ، وسنوزع هذه الموضوعات على الفقرتين التاليتين :

أولا : تعريف اللوغاريتم

ثانيا : خواص اللوغاريتمات .

اولا ــ تعريف اللوغاريتم :

يعد اللوغاريتم مقلوبا لعملية الرفع الى قوة من جهة اليمين . لتكن لدينا المساواة $\text{حـ} = \text{ب}^{\text{ن}}$ ، حيث ب عدد حقيقي موجب لايساوي الواحد ($\text{ب} \in \text{ح} / \{ ١ \}$) ، و حـ عدد حقيقي موجب $\text{حـ} \in \text{ح}^{+}$ ، ان العدد ن هو تعريفا لوغاريتم العدد حـ بالاساس ب ، وهذا ما يعبر عنه بالعلاقـــة :

$$\text{ن} = \text{لـو}_{\text{ب}}\ \text{حـ}$$

وهكذا فان لوغاريتم العدد الحقيقي الموجب بالاساس ب هـــو القوة التي يجب أن نرفع عليها الاساس ب لكي نحصل على العدد حـ .

ثانيا ـ خواص اللوغاريتمات :

اعتمادا على تعريف اللوغاريتم ، يمكن التذكير بالخواص التالية :

الخاصة الاولى : يساوي لوغاريتم جداء عدة أعداد بالنسبة لاساس ما الى مجموع لوغاريتمات هذه الاعداد بالنسبة للاساس نفسه . ومعنى ذلك أن :

$$لع_{ب} \left(حـ \times د \right) = لع_{ب} حـ + لع_{ب} د$$

البرهان :

نفرض أن :

$$حـ = ب^{ل} \quad \text{ومنه فان } ل = لع_{ب} حـ$$

$$د = ب^{م} \quad \text{ومنه فان } م = لع_{ب} د$$

اذن :

$$حـ \times د = ب^{ل} \times ب^{م} = ب^{ل+م}$$

وحسب تعريف اللوغاريتم :

$$لع_{ب} \left(حـ \times د \right) = ل + م \quad \text{وبالتبديل}$$

$$لع_{ب} \left(حـ \times د \right) = لع_{ب} حـ + لع_{ب} د$$

الخاصة الثانية : لوغاريتم كسر بالنسبة لاساس ما ب يساوي الى لوغاريتم الصورة مطروحا منه لوغاريتم المخرج بالنسبة للاساس نفسه ، أي :

$$\text{لع}_{\text{ب}}\,\frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{حـ} - \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{د}$$

البرهـــان : لنفرض أن $\text{و} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$

ومنه $\text{حـ} = \text{و} \times \text{د}$

وحسب الخاصة الاولى $\text{لع}_{\text{ب}}\,\text{حـ} = \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{و} + \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{د}$

أو $\text{لع}_{\text{ب}}\,\text{و} = \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{حـ} - \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{د}$

وبتبديل و بقيمتها يكون : $\text{لع}_{\text{ب}}\,\frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{حـ} - \text{لع}_{\text{ب}}\,\text{د}$

الخاصة الثالثة : يساوي لوغاريتم عدد مرفوع الى قوة صحيحة بالنسبة لاساس ما ب الى جداء القوة في لوغاريتم العـــدد بالنســبة للاساس نفسه :

أي :

$$\text{لع}_{\text{ب}}\,\text{حـ}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لع}_{\text{ب}}\,\text{حـ}$$

البرهان :

$$ح^{ن} = \underbrace{ح \times ح \times ح \times ح \times \cdots \times ح}_{ن\ مرة}$$

حسب الخاصة الاولى .

$$لع_{ب}\, ح^{ن} = لع_{ب}\, ح + لع_{ب}\, ح + لع_{ب}\, ح + \cdots + لع_{ب}\, ح$$

أو $$لع_{ب}\, ح^{ن} = ن\, لع_{ب}\, ح$$

الخاصة الرابعة : يساوي لوغاريتم الجذر النوني لعدد بالنسبة لاساس ما ب الى حاصل قسمة لوغاريتم هذا العدد على دليل الجذر بالنسبة للاساس نفسه ، أو :

$$لع_{ب} \sqrt[ن]{ح} = \frac{1}{ن}\, لع_{ب}\, ح$$

البرهان : حسب خواص القوى :

$$\sqrt[ن]{ح} = ح^{\frac{1}{ن}}$$

وحسب الخاصة الثالثة : $$لع_{ب}\, ح^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ن}\, لع_{ب}\, ح$$

نستنتج من الخواص السابقة أن استعمال اللوغاريتمات يساعد على اختصار العمليات الحسابية حيث تستبدل :

عملية الضرب بعملية الجمع $لع\,(حـ \times د) = لع\,حـ + لع\,د$

وعملية القسمة بعملية الطرح $لع\,\frac{حـ}{د} = لع\,حـ - لع\,د$

وعملية الرفع الى قوة بعملية الضرب $لع\,حـ^{ن} = ن\,لع\,حـ$

وعملية الجذر بعملية قسمة $لع\,\sqrt[ن]{حـ} = \frac{1}{ن}\,لع\,حـ$

ونستخلص من خواص اللوغاريتم وتعريفه النتائج التالية :

١ ـ يساوي لوغاريتم العدد واحد الى الصفر مهما كان أساس اللوغاريتم :

$$١ = ب^{٠}$$

$$أو\ لع_{ب}\,١ = ٠$$

٢ ـ بالنظر لكون الاساس ب عددا موجبا ، فان رفع هذا الاساس لقوة موجبة أو سالبة يعطي عددا موجبا ، وبالتالي فان الاعداد الموجبة لها لوغاريتمات في حين لا يمكن حساب أو ايجاد لوغاريتمات للاعداد السالبة .

٣ ــ نستطيع كتابة الاعداد الموجبة التي تقل عن الواحد استنادا الى أساس موجب وأس سالب ، وبالتالي فان لهذه الاعداد لوغاريتمات سالبة .

٤ ــ يساوي لوغاريتم الصفر الى اللانهاية السالبة (ــ ∞) ، في حين يساوي لوغاريتم اللانهاية الموجبة (+ ∞) الى اللانهاية الموجبة (+ ∞) .

٥ ــ يعرف تمام اللوغاريتم بالاستناد الى الخاصة الثانية على النحو التالي :

$$\text{لع}_{\text{ب}}\ \frac{١}{\text{ح}} = \text{لع}_{\text{ب}}\ ١ - \text{لع}_{\text{ب}}\ \text{ح}$$

وبما أن لع الواحد يساوي الصفر فان :

$$\text{لع}_{\text{ب}}\ \frac{١}{\text{ح}} = \therefore - \text{لع}_{\text{ب}}\ \text{ح} = - \text{لع}_{\text{ب}}\ \text{ح}$$

نسمي المقدار ــ $\text{لع}_{\text{ب}}$ ح بتمام لوغاريتم ح بالاساس ب ، ويرمز له بالشكل $\text{تما لع}_{\text{ب}}\ \text{ح} = - \text{لع}_{\text{ب}}\ \text{ح}$

البحث الثاني

اللوغاريتمات المستعملة

نستعمل في الحياة العملية أساسين لوغاريتميين : الاساس العشري والاساس الطبيعي أو النبيري • يستخدم الاساس العشري المعتمد على العدد عشرة كأساس لتبسيط العمليات الحسابية في حين يستخدم الاســاس الطبيعي المستند الى العدد الطبيعي في أبحاث الاشتقاق والتفاضل والتكامل •

اولا ــ اللوغاريتمات العشرية :

اللوغاريتمات العشرية هي اللوغاريتمات المستندة الى الاساس العشري ، ونظرا لشيوع استعمالها فقد اصطلح على عدم كتابةالاساس (١٠) • سندرس في هذه الفقرة القواعد المتبعة فيحساباللوغاريتمات العشرية ثم سنتعرض للعمليات الاربع على اللوغاريتمات •

آ ــ القواعد المتبعة في حساب اللوغاريتمات العشرية :

تتعلق هذه القواعد بايجاد القوى الصحيحــة للعــدد (١٠) ، وايجاد العدد البياني والجزء العشري من لوغاريتم عدد •

١ً ــ لوغاريتمات القوى الصحيحة للعدد (١٠) :

يمكن استخراج لوغاريتمات الاعداد الممكن ارجاعها الى العدد (١٠) مرفوعا الى قوة صحيحة انطلاقا من تعريف اللوغاريتم •

أمثلـــة :

$١٠ = ١٠^{١}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ١٠ = ١$

$١٠٠ = ١٠^{٢}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠ = ٢$

$١٠٠٠ = ١٠^{٣}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = ٣$

$١ = ١٠^{٠}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ١ = ٠$

$٠ر١ = ١٠^{-١}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ٠ر١ = -١$

$٠ر٠١ = ١٠^{-٢}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ٠ر٠١ = -٢$

$٠ر٠٠١ = ١٠^{-٣}$ ومنـــه $\text{لو}_{١٠}\ ٠ر٠٠١ = -٣$

وينتج من ذلك أن :

ـ لوغاريتمات القوى الصحيحة للعدد (١٠) هي أعداد صحيحة موجبة اذا كانت القوى أكبر من الواحد وسالبة اذا كانت أصغر من الواحـــد .

ـ لوغاريتم العدد (١) يساوي الصفر •

ـ مهما كانت القوة التي نرفع اليها العدد (١٠) فان الناتج يكون عددا موجبا وهذا يعني أنه ليس للعدد السالب لوغاريتم عشري •

ـ يزداد لوغاريتم العدد بازدياد العدد ويصغر بصغره ، فاذا تناهى العدد الى ما لانهاية فان لوغاريتمه يتناهى الى اللانهاية الموجبة، أي $١٠^{\infty} = \infty$ ، ومنه $لو_{١٠} \infty = \infty$ ، وبالعكس فعندما يصغر العدد مقتربا من الصفر تقترب قيمته من $١٠^{-\infty}$ وواضح أن $١٠^{-\infty} = \frac{١}{١٠^{\infty}} = ٠$ ،

ومنه فان $لو_{١٠} ٠ = -\infty$ •

٣ً ـ العدد البياني والجزء العشري من لوغاريتم عدد :

ان لوغاريتمات الاعداد المحصورة بين القوى الصحيحة للعدد(١٠) هي أعداد غير صحيحة مؤلفة من عدد صحيح يسمى العدد البياني وجزء عشري • وهكذا فان :

كل عدد يقع بين ١٠٠و١٠٠٠يساوي لوغاريتمه ٢+كسرعشري موجب

كل عدد يقع بين ١٠ و ١٠٠ يساوي لوغاريتمه ١+كسرعشري موجب

كل عدد يقع بين ١ و ١٠ يساوي لوغاريتمه ٠ + كسر عشري موجب

كل عدد يقع بين ١ر٠ و ١ يساوي لوغاريتمه ـ١+كسرعشري موجب

كل عدد يقع بين ٠١ر٠و١ر٠يساوي لوغاريتمه ـ٢+كسرعشري موجب وهكذا ••

ولايجاد العدد البياني من لوغاريتم عدد نفرق بين حالتين :

ـ العدد الذي نبحث عن لوغاريتمه أكبر من الواحد : يساوي العدد البياني للوغاريتمه عدد المراتب الصحيحة التي تؤلف ذلك العدد ناقصا واحد •

ـ العدد الذي نبحث عن لوغاريتمه أصغر من الواحد : يساوي العدد البياني للوغاريتمه الى عدد سالب تساوي قيمته المطلقة عدد أصفار العدد العشري بما فيها صفر الفاصلة وقبل الوصول الى أول رقم غير الصفر •

أمثلـة :

العدد البياني في لع ٠ر٥٨ هو ـ ١ ويكتب بالشكل $\bar{١}$

العدد البياني في لع ٠ر٠٨٦ هو - ٢ ويكتب بالشكل $\bar{٢}$

العدد البياني في لع ٠ر٠٠٤٢ هو ـ٣ ويكتب بالشكل $\bar{٣}$

وهكذا ••

ب ـ العمليات الاربع على اللوغاريتمات :

وتشمل هذه العمليات جمع وطرح وضرب وقسمة اللوغاريتمات•

١ ـ جمع اللوغاريتمات : تجمع اللوغاريتمات جمعا جبريا عاديا ، القسم الصحيح مع القسم الصحيح والقسم العشري مع القسم العشري •

مثال : لع حـ + لع د = ٢٫٢١١٣٢ + ١٫٢٥٧١٣

= ٣٫٤٦٨٤٥

لع س + لع ع = ٣٫٢٧٢٢٤ + $\overline{٢}$٫١٧١١٨

= ١٫٤٤٣٤٢

٢ً ـ طرح اللوغاريتمات : بما أن القسم العشري من اللوغاريتم موجب دوما فسيستعان لاتمام عملية الطرح بتمام اللوغاريتم وذلك بطرح القسم العشري من الواحد واضافة (١) الى العدد البياني وتغيير اشارته الجبرية بكتابة الناقص فوق العدد البياني ثم نبدل اشارة الناقص المستعملة باللوغاريتم ككل الى اشارة زائد ثم نجري عملية الجمع اللوغاريتمي كالمعتاد بجمع العدد البياني مع العدد البياني والقسم العشري مع القسم العشري • مثال :

لع ٣٠٠ = ٢٫٤٧٧١٢

ـ لع ٣٠٠ = ـ(٢٫٤٧٧١٢) = $\overline{٣}$٫٥٢٢٨٨

مثال :

لع ٥٠٠ ـ لع ٣٠٠ = ٢٫٦٩٨٩٧ ـ ٢٫٤٧٧١٢

= ٢٫٦٩٨٩٧ + $\overline{٣}$٫٥٢٢٨٨ = ٠٫٢٢١٨٥

٣ً ـ ضرب اللوغاريتمات : اذا كان اللوغاريتم موجبا بقسميه فيكون الضرب اللوغاريتمي كالضرب العادي :

مثال : لع حـ = ٢ر٥٧١٢٣

لع $\text{حـ}^{٣}$ = ٣ لع حـ = ٣ (٢ر٥٧١٢٣) = ٧ر٧١٣٦٩

أما اذا كان العدد البياني سالبا والعشري موجبا ، فنضرب أولا القسم العشري ونطرح منه العدد البياني بعد الضرب :

مثال : لع د = $\overline{٢}$ر٦٨١٥٢

لع $\text{د}^{٤}$ = ٤ ($\overline{٢}$ر٦٨١٥٢)

= ٤ × ٠ر٦٨١٥٢ ــ ٤ × ٢ = $\overline{٦}$ر٧٢٦٠٨

٤ ــ قسمة اللوغاريتمات : اذا كان العدد البياني يقبل القسمة مباشرة على العدد المقسوم عليه ، فنقسم العدد البياني والجزء العشري بصورة عادية .

مثال : لع حـ = $\overline{٤}$ر٢٥٧٣٦

لع $\sqrt{\text{حـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\overline{٤}$ر٢٥٧٣٦) = $\overline{٢}$ر١٢٨٦٨

أما اذا كان العدد البياني سالبا ولا يقبل القسمة على المقسوم عليه فنضيف اليه عدداً صحيحاً سالباً حتى يقبل القسمة على المقسوم عليه ثم نضيف الى القسم العشري العدد الصحيح نفسه ولكن باشارة موجبة .

مثال $\text{لغ}\ د = \bar{٥}ر٢٥٦٧١$

$$\text{لغ}\ \sqrt[٤]{د} = \frac{١}{٤}\left(\bar{٥}ر٢٥٦٧١\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(ـ ٥ + ٠ر٢٥٦٧١\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(ـ ٥ ـ ٣ + ٣ + ٠ر٢٥٦٧١\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(ـ ٨ + ٣ر٢٥٦٧١\right)$$

$$= \frac{ـ ٨}{٤} + \frac{٣ر٢٥٦٧١}{٤}$$

$$= ـ ٢ + ٠ر٨١٤١٧ = \bar{٢}ر٨١٤١٧$$

ثانيا ـ اللوغاريتم الطبيعي او النبيري :

للوغاريتمات الطبيعية أهمية خاصة لاستعمالهافي الابحاث الرياضية الراقية كاشتقاق وتكامل وتفاضل التوابع اللوغاريتمية • وتعتمد هذه اللوغاريتمات في أساسها على العدد الطبيعي (e) • لذلك سنقوم أولا بتعريف العدد الطبيعي ثم بتعريف اللوغاريتم الطبيعي وأخيرا سندرس العلاقة بين اللوغاريتم العشري واللوغاريتم الطبيعي•

آ ـ تعريف العدد الطبيعي :

ليكن التابع $ع = (١ + س)^{\frac{١}{س}}$ المعرف على ح ـ {٠} ، يمكن التحقق من أن هذا التابع ينتهي الى نهاية منتهية عندما تنتهي س الى

الصفر ، فلو أنهينا س الى الصفر بقيم متناقصة أو بقيم متزايدة لوجدنا أن ع يقترب من نهاية منتهية تساوي تقريبا ٢ر٧١٨٢٨ كما يبدو ذلك من الجدول التالي :

س	ع	س	ع
٠ر٠١	٢ر٧٠٤٨١	–٠ر٠١	٢ر٧٣١٩٩
٠ر٠٠١	٢ر٧١٦٩٢	–٠ر٠٠١	٢ر٧١٩٦٤
٠ر٠٠٠١	٢ر٧١٨١٤	–٠ر٠٠٠١	٢ر٧١٨٤١
٠ر٠٠٠٠١	٢ر٧١٨٢٦	–٠ر٠٠٠٠١	٢ر٧١٨٢٩
٠ر٠٠٠٠٠١	٢ر٧١٨٢٨	–٠ر٠٠٠٠٠١	٢ر٧١٨٢٨

ويبدو من هذا الجدول أنه عندما تقترب س من الصفر بلا تناه بقيم متزايدة أو متناقصة فان ع تنتهي الى قيمة تقريبية تساوي ٢ر٧١٨٢٨ ، ونرمز لهذه النهاية بالرمز (e) أي أن ٢ر٧١٨٢٨ = e مقربة لخمسة أرقام عشرية ، وهكذا فيمكن كتابة :

$$e = \lim_{\text{س} \to ٠} (١ + \text{س})^{\frac{١}{\text{س}}}$$

واذا جعلنا $\text{س} = \frac{١}{\text{ص}}$ في المقدار $(١ + \text{س})^{\frac{١}{\text{س}}}$ فان $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ،

فاذا انتهى س الى الصفر ، فان ص سينتهي الى $\mp \infty$ • وبالتالي فيمكن التعبير عن العدد الطبيعي بالعلاقة التالية :

$$e = \underset{س \to .}{\text{نهاية}} \left(1 + س\right)^{\frac{1}{س}} = \underset{ص \to \mp\infty}{\text{نهاية}} \left(1 + \frac{1}{ص}\right)^{ص}$$

ب ـ اللوغاريتم الطبيعي او النبيري :

عرفنا سابقا لوغاريتم العدد حـ $=$ ب^{ن} بالاساس ب بالعلاقــة التاليــة :

$$\text{لع}_{ب}\ حـ = ن$$

فاذا كان الاساس ب مساويا للعدد الطبيعي (e) فان اللوغاريتم الناتج يدعى باللوغاريتم الطبيعي أو النبيري ، أي :

$$حـ = e^{ن}$$

$$\text{لع}_{e}\ حـ = ن$$

حـ ـ العلاقة بين اللوغاريتم العشري واللوغاريتم الطبيعي :

لنفرض أن لع$_{ب}$ حـ $=$ ن فنجد أن حـ $=$ ب^{ن} وذلك حسب تعريف اللوغاريتم •

لنأخذ لوغاريتم العلاقة الأخيرة بالأساس د فيكون :

$$\text{لع}_{د}\ ح = \text{لع}_{د}\ ب^{ن}$$

$$\text{لع}_{د}\ ح = ن\ \text{لع}_{د}\ ب$$

وبتبديل (ن) بقيمتها $\text{لع}_{ب}\ ح$ يكون :

$$\text{لع}_{د}\ ح = \text{لع}_{ب}\ ح \times \text{لع}_{د}\ ب$$

فاذا جعلنا د = ١٠ ، و ب = ه فيكون

$$\text{لع}_{١٠}\ ح = \text{لع}_{ه}\ ح \times \text{لع}_{١٠}\ ه$$

$$\text{أو}\ \text{لع}_{ه}\ ح = \frac{١}{\text{لع}_{١٠}\ ه} \times \text{لع}_{١٠}\ ح$$

وبما أن $\text{لع}_{١٠}\ ه = ٠٫٤٣٤٢٩$ وكذلك فان $\frac{١}{\text{لع}_{١٠}\ ه} = ٢٫٣٠٢٥٨$

فيمكن كتابة العلاقتين السابقتين كالتالي :

$$\text{لع}_{١٠}\ ح = ٠٫٤٣٤٢٩\ \text{لع}_{ه}\ ح$$

$$\text{لع}_{ه}\ ح = ٢٫٣٠٢٥٨\ \text{لع}_{١٠}\ ح$$

البحث الثالث

استخدام الجداول اللوغاريتمية العشرية

أعدت جداول لوغاريتمية عشرية تمكن من معرفة لوغاريتمات الاعداد الموجبة بالاساس العشري . ويتوجب لاستعمال هذه الجداول معرفة حل المسألتين التاليتين : اذا أعطينا عددا ما فما هو اللوغاريتم العشري لهذا العادي ، واذا أعطينا لوغاريتما ما فما هو العدد الذي يقابل هذا اللوغاريتم ؟ .

اولا ـ ايجاد لوغاريتم عدد ما باستخدام الجداول اللوغاريتمية :

يتألف لوغاريتم أي عدد موجب من قسمين القسم الصحيح (العدد البياني) والقسم العشري . ولا تتضمن جداول اللوغاريتمات معلومات تمكن من ايجاد القسم الصحيح ، ولقد وضحنا سابقا أن العدد البياني من لوغاريتم عدد يساوي الى عدد مراتبه ناقصا واحد اذا كان العدد أكبر من الواحد ، ويساوي الى عدد أصفاره بما فيها صفر الفاصلة إذا كان العدد موجبا وأصغر من الواحد .

تمكن الجداول اللوغاريتمية من ايجاد القسم العشري للوغاريتم عدد ما ، وهذا القسم ثابت لكل الاعداد المؤلفة من الارقام نفسها الموضوعة بترتيب واحد والتي لاتختلف الا بمكانة الفاصلة وبعدد الاصفار الواردة على يمين الفاصلة ، ولتحديد القسم العشري نميز الحالتين التاليتين :

ـ اذا كان العدد لا يتضمن أكثر من أربعة أرقام بغض النظر عن الفاصلة وعن الاصفار التي ينتهي بها ، فالجداول تعطينا مباشرة القسم العشري للوغاريتم هذا العدد ومثالا على ذلك لكي نستخرج لوغاريتم العدد ١٧٥٧ نضع أولا القسم الصحيح وهو ٣ ثم نرى أن الجدول يعطينا القسم العشري لهذا العدد وهو ٢٤٤٧٧ وبذلك يكون :

لـع ١٧٥٧ = ٣ر٢٤٤٧٧

ـ اذا تضمن العدد أكثر من أربعة أرقام بغض النظر عن الفاصلة وعن الاصفار التي ينتهي بها فيتطلب استخراج القسم العشري لـه اجراء حسابات نسبية • ومثالا على ذلك ، لاستخراج لوغاريتم العدد ١٨٧٢ر٧ نستعين بجدول اللوغاريتمات ونجري العمليات التالية :

العدد	القسم العشري
١٨٧٣	٢٧٢٥٤
١٨٧٢	٢٧٢٣١
١	٢٣

وبافتراض ان ازدياد اللوغاريتم يكون بنسبة طردية مع ازدياد العدد ، وهذا صحيح بصورة تقريبية ، نجري التناسب التالي :

من أجل فرق ١ في العدد يكون الفرق ٢٣ في القسم العشري •

ومن أجل فرق ٧ر٠ أي (١٨٧٢ر٧ ـ ١٨٧٢) في العدد يكون

الفرق س = $\frac{٢٣ \times ٠ر٧}{١}$ ويكون القسم العشري للوغاريتم ١٨٧٢ر٧

مساويا ٢٧٢٣١ + $\frac{٠ر٧ \times ٢٣}{١}$ = ٢٧٢٤٧ وهكذا لوغاريتم ١٨٧٢ر٧

يساوي ٢٧٢٤٧ر٣ •

ثانيا ـ ايجاد العدد المقابل للوغاريتم :

لمعرفة العدد الذي يقابل لوغاريتم ما ، نميز الحالتين التاليتين :

ـ القسم العشري من اللوغاريتم موجودفي جداولاللوغاريتمات: في هذه الحالة ، بما أن العدد الذي يقابل اللوغاريتم موجود في الجداول نستطيع قراءته مباشرة ومن ثم اذا كان القسم الصحيح للوغاريتم موجبا يكون عدد الارقام الصحيحة للعدد مساويا للقسم الصحيح للوغاريتم مضافا اليه ١ ، واذا كان القسم الصحيح للوغاريتم سالبا تكون مرتبة الرقم الاول بعد الفاصلة مساوية للقيمة المطلقة للقسم الصحيح من اللوغاريتم •

ومثالا على ذلك فالعدد الذي يقابل القسم العشري للوغاريتم : ٢ر٨٨٣٩٥ هو ٧٦٥٥ والقسم الصحيح ٢ من اللوغاريتم يدل على أن العدد مؤلف في قسمه الصحيح من ٣ أرقام ، فالعدد يكون اذن ٥ر٧٦٥ ، والعدد الذي يقابل القسم العشري للوغاريتم $\overline{٢}$ر١٨٨٠٨ هو ١٥٤٢ والقسم الصحيح يساوي (ـ ٢) يدلنا على أن منزلة الرقم الاول بعد الفاصلة هي ٢ فالعدد يكون اذن ٠١٥٤٢ر٠

ـ القسم العشري من اللوغاريتم غير موجود في جداول اللوغاريتمات • في هذه الحالة نصل الى معرفة العدد بعداجراءحسابات

نسبية ، وكمثال على ذلك ، لمعرفة العدد الذي يقابل اللوغاريتم ٣ر٨٣٥٤٠ نستعين بجداول اللوغاريتمات ونجري العمليات التالية :

العدد	القسم العشري
٦٨٤٦	٨٣٥٤٤
٦٨٤٥	٨٣٥٣٧
١	٧

فاذا فرضنا أن اللوغاريتم يتزايد طرديا بازدياد العدد ، وهذا صحيح بصورة تقريبية ، فنجري التناسب التالي : من أجل فرق ٧ في القسم العشري يكون الفرق ١ في العدد ٠

ومن أجل فرق ٣ أي (٨٣٥٤٠ ــ ٨٣٥٣٧) يكون الفرق س أي

$$س = \frac{٣ \times ١}{٧} = ٠ر٤٣$$

فالعدد الذي يقابل القسم العشري هو ٦٨٤٥ر٤٣ وبما أن الصحيح من اللوغاريتم هو ٣ فالعدد يكون اذن ٦٨٤٥ر٤٣ ٠

تطبيقــات عمليــة

أولاً ــ احسب لوغاريتمات الأعداد التاليــة باستخدام الجداول اللوغاريتمية العشرية :

$$\text{ب} = \sqrt[٤]{(١٢ر٧١٤)^{٣}}$$

$$\text{حـ} = \sqrt[٣]{(٨ر٧٤١٥)^{٤}}$$

$$\text{د} = \sqrt[٨]{(١ر٤١٤)^{١٦}}$$

الحــل :

$$\text{لع}_{١٠}\,\text{ب} = \frac{٣}{٤}\,\text{لع}_{١٠}\,١٢ر٧١٤$$

$$= \frac{٣}{٤}\left(١ر١٠٤٢٨\right) = ٠ر٨٢٨٢١$$

$$\text{لع}_{١٠}\,\text{حـ} = \frac{٤}{٣}\,\text{لع}_{١٠}\,٨ر٧٤١٥$$

$$= \frac{٤}{٣}\left(٠ر٩٤١٥٨\right) = ١ر٢٥٥٤٤$$

$$\text{لع}_{١٠}\,\text{د} = \frac{١٦}{٨}\,\text{لع}_{١٠}\,١ر٤١٤$$

$$= ٢\left(٠ر١٥٠٤٤\right) = ٠ر٣٠٠٨٨$$

ثانياً ــ اذا علمت أن : لع$_{١٠}$ ٢ = ٠ر٣٠١٠٣

لع$_{١٠}$ ٣ = ٠ر٤٧٧١٢

لع$_{١٠}$ ٧ = ٠ر٨٤٥١٠

فاحسب اللوغاريتمات العشرية للاعداد التالية :

٢١ ، ٤٢ ، ٣٥ ، ٧٠ ، ٨٤ ، ٩٨

الحـل :

لع(٢١) = لع (٧ × ٣) = لع ٧ + لع ٣ = ٠ر٨٤٥١٠ + ٠ر٤٧٧١٢

= ١ر٣٢٢٢٢

لع(٤٢) = لع (٢ × ٣ × ٧) = لع٢ + لع٣ +لع٧ = ١ر٦٢٣٢٥

لع(٣٥)=لع(٧×١٠ / ٢)=لع٧+لع١٠−لع٢=٠ر٨٤٥١٠+١−٠ر٣٠١٠٣

= ١ر٥٤٤٠٧

لع(٧٠) = لع (٧×١٠) = لع٧+لع١٠ = ٠ر٨٤٥١٠+١ = ١ر٨٤٥١٠

لع(٨٤) = لع (٢١×٢^{٢}) = لع٢١+٢لع ٢ = ١ر٣٢٢٢٢ + ٢ ×

٠ر٣٠١٠٣ = ١ر٩٢٤٢٨

لع(٩٨) = لع(٢×٤٩) = لع(٢×٧^{٢}) = لع٢ + ٢لع ٧

= ٠ر٣٠١٠٣ + ٢ × ٠ر٨٤٥١٠ = ١ر٩٩١٢٣

ثالثا ـ اوجد باستخدام الجداول اللوغاريتمية ، لوغاريتمات الاعداد التالية :

لع$_{٣}$ ٨ ، لع$_{٣}$ ٢ ، لع$_{٣}$ ٥ ، لع$_{٣}$ ١٠ ، لع$_{٣}$ ١٠ $\sqrt{١٠}$ ، لع$_{٥}$ ٧ ،

لع$_{٥}$ ٣ ، لع$_{٥}$ ١٧ ، لع$_{٥}$ ١٥ .

الحــل :

لدينا العلاقة العامة : لع$_{د}$ حـ = لع$_{ب}$ حـ × لع$_{د}$ ب

وبافتراض د = ١٠ ، ب = ٣ يكون

لع$_{١٠}$ حـ = لع$_{٣}$ حـ × لع$_{١٠}$ ٣

$$\text{أو}\quad \text{لع}_{٣}\,\text{حـ} = \frac{\text{لع}_{١٠}\,\text{حـ}}{\text{لع}_{١٠}\,٣} = \frac{\text{لع}_{١٠}\,\text{حـ}}{٠٫٤٧٧١٢}$$

$$\text{لع}_{٣}\,٨ = \frac{\text{لع}_{١٠}\,٨}{\text{لع}_{١٠}\,٣} = \frac{٠٫٩٠٣٠٨}{٠٫٤٧٧١٢} = ١٫٨٩٢٧٧$$

$$\text{لع}_{٣}\,٢ = \frac{\text{لع}_{١٠}\,٢}{\text{لع}_{١٠}\,٣} = \frac{٠٫٣٠١٠٣}{٠٫٤٧٧١٢} = ٠٫٦٣٠٩٣$$

$$\text{لع}_{٣}\,٥ = \frac{\text{لع}_{١٠}\,٥}{\text{لع}_{١٠}\,٣} = \frac{٠٫٦٩٨٩٧}{٠٫٤٧٧١٢} = ١٫٤٦٤٩٧$$

$$\text{لو}_{3}\,10 = \frac{\text{لو}_{10}\,10}{\text{لو}_{10}\,3} = \frac{1}{0.47712} = 2.0959$$

$$\text{لو}_{3}\,\sqrt{10^{3}} = \frac{3}{2}\,\text{لو}_{3}\,10 = \frac{3}{2} \times 2.0959 = 3.14385$$

$$\text{لو}_{5}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{10}\,\text{س}}{\text{لو}_{10}\,5} = \frac{\text{لو}_{10}\,\text{س}}{0.69897}$$

$$\text{لو}_{5}\,7 = \frac{\text{لو}_{10}\,7}{0.69897} = 1.20906$$

$$\text{لو}_{5}\,3 = \frac{\text{لو}_{10}\,3}{0.69897} = 0.68260$$

$$\text{لو}_{5}\,27 = 3\,\text{لو}_{5}\,3 = 2.04780$$

$$\text{لو}_{5}\,15 = \text{لو}_{5}\,3 + \text{لو}_{5}\,5 = 1.68260$$

$$\text{لو}_{5}\,25 = 2\,\text{لو}_{5}\,5 = 2$$

رابعا ـ احسب اللوغاريتمات التالية :

$\text{لو}_{2}\,7$ ، $\text{لو}_{2}\,12$ ، $\text{لو}_{2}\,\sqrt{10}$ ، $\text{لو}_{2}\,0.25$ ، $\text{لو}_{2}\,e$ ، $\text{لو}_{e}\,2$ ،

$\text{لو}_{e}\,3$ ، $\text{لو}_{e}\,5$ ، $\text{لو}_{e}\,\sqrt{0.10}$

الحـــل :

$$\text{لو}_{٢}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{١٠}\,\text{س}}{\text{لو}_{١٠}\,٢} = \frac{\text{لو}_{١٠}\,\text{س}}{٠\text{ر}٣٠١٠٣}$$

$$\text{لو}_{٢}\,٧ = \frac{\text{لو}_{١٠}\,٧}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = \frac{٠\text{ر}٨٤٥١٠}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = ٢\text{ر}٨٠٧٣٥$$

$$\text{لو}_{٢}\,١٢ = \frac{\text{لو}_{١٠}\,١٢}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = \frac{١\text{ر}٠٧٩١٨}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = ٣\text{ر}٥٨٤٩٥$$

$$\text{لو}_{٢}\,\sqrt{١٠} = \frac{\text{لو}_{١٠}(١٠)^{\frac{١}{٢}}}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = \frac{٠\text{ر}٥}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = ١\text{ر}٦٦٠٩٦$$

$$\text{لو}_{٢}\,٢٥ = \frac{\text{لو}_{١٠}\,٢٥}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = \frac{١\text{ر}٣٩٧٩٤}{٠\text{ر}٣٠١٠٢} = ٤\text{ر}٦٤٣٨٥$$

$$\text{لو}_{٢}\,e = \frac{\text{لو}_{١٠}\,e}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = \frac{٠\text{ر}٤٣٤٢٩}{٠\text{ر}٣٠١٠٣} = ١\text{ر}٤٤٢٦٨$$

$$\text{لو}_{e}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{١٠}\,\text{س}}{\text{لو}_{١٠}\,e} = \frac{\text{لو}_{١٠}\,\text{س}}{٠\text{ر}٤٣٤٢٩}$$

$$\text{لو}_{e}\,٢ = \frac{\text{لو}_{١٠}\,٢}{٠\text{ر}٤٣٤٢٩} = \frac{٠\text{ر}٣٠١٠٣}{٠\text{ر}٤٣٤٢٩} = ٠\text{ر}٦٩٣١٥$$

$$\text{لو}_{e}\,٣ = \frac{\text{لو}_{١٠}\,٣}{٠\text{ر}٤٣٤٢٩} = ١\text{ر}٠٩٨٦١$$

$$\text{لع}_{e}\ ٥ = \frac{\text{لع}_{١٠}\ ٥}{٠ر٤٣٤٢٩} = \frac{٠ر٦٩٨٩٧}{٠ر٤٣٤٢٩} = ١ر٦٠٩٤٥$$

$$\text{لع}_{e}\ \sqrt{١٠} = \frac{\text{لع}_{١٠}\ ١٠^{\frac{١}{٢}}}{٠ر٤٣٤٢٩} = \frac{٠ر٥}{٠ر٤٣٤٢٩} = ١ر١٥١٣٠$$

الفصل الثالث

الحساب التوافقي ونظرية ذي الحدين

يتضمن هذا الفصل موضوعين متميزين سنعالجهما في بحثين مستقلين :

البحث الاول : الحساب التوافقي

البحث الثاني : نظرية ذي الحدين

البحث الاول

الحساب التوافقي

يهدف التحليل التوافقي الى تعداد الاشكال المختلفة للمجموعات التي يمكن تكوينها من أشياء مفروضة من طبيعة واحدة وذلك ضمن شروط معروفة بصورة مسبقة •

اولا ــ تعريف التباديل :

لنفرض أن لدينا مجموعة مؤلفة من (ن) عنصراً ، اذا ألفنا من هذه المجموعة مجموعات جزئية تحتوي على عدد من العناصر تقل عن تلك الموجودة في المجموعة الاصلية فان هذه المجموعات تختلف عن بعضها حسب طبيعة العناصر المشكلة لها وحسب ترتيب هذه العناصر داخل المجموعة ، أما اذا كان عدد العناصر في المجموعات الجزئية مساو الى عدد العناصر في المجموعة الاصلية فان هذه المجموعات تختلف عن بعضها فقط بالترتيب •

نفرض أن لدينا المجموعة (ب ، حـ ، د) فنستطيع أن نشكل من هذه العناصر المجموعات التالية المؤلفة من عنصرين :

ب حـ	حـ ب
ب د	د ب
حـ د	د حـ

تختلف هذه المجموعات عن بعضها بعضا بطبيعة العناصر وبترتيب العناصر المكونة لها • كما تتمكن من تشكيل المجموعات المؤلفة من ثلاثة عناصر كالتالي :

ب حـ د

ب د حـ

حـ ب د

حـ د ب

د ب حـ

د حـ ب

وتتباين هذه المجموعات عن بعضها بعضا بترتيب العناصر في حين أنها تتألف من العناصر ذاتها • ويسمى هذا النوع من المجموعات التي لاتختلف عن بعضها بطبيعة العناصر المكونة لها وانما بترتيب العناصر بالتباديل • ونلاحظ أن عدد العناصر في المجموعات المشتقة (ر) يساوي الى عدد العناصر في المجموعة الاصلية (ن) •

ثانيا ـ تعريف التوافيق :

اذا شكلنا من الاشياء المفروضة مجموعات تحتوي عددا معينا من العناصر ، واذا لم نجعل لترتيب العناصر الداخلة في تكوين المجموعات المشتقة أهمية في التمييز بين هذه المجموعات،فاننا نحصل على مجموعات يثبت فيها عدد العناصر الداخلة في تشكيلها وتختلف عن بعضها فقط بطبيعة العناصر • هذا النوع من المجموعات المشتقة يسمى بالتوافيق أو المتوافقات •

فمن المجموعة الاصلية ب حـ د يمكننا اشتقاق ثلاث متوافقات مؤلف كل منها من عنصرين وهي :

ب حـ
ب د
حـ د

ومتوافقة واحدة مؤلفة من ثلاثة عناصر وهي : ب حـ د .

ثالثا ـ تعريف التراتيب :

اذا شكلنا من مجموعة أصلية مجموعات مشتقة لا تحتوي على كل العناصر الموجودة في المجموعة الاصلية بل تتضمن عددا ثابتا منها ، وميزنا بين مجموعة مشتقة وأخرى بطبيعة العناصر الداخلة في تشكيلها وبترتيب هذه العناصر ، فاننا نحصل على مجموعات نسميها بالتراتيب.

فمن المجموعة الاصلية ب حـ د يمكن تشكيل التراتيب التالية المؤلفة من عنصرين :

ب	حـ	حـ	ب
حـ	د	د	حـ
ب	د	د	ب

وباعتبار عدد العناصر في المجموعة الاصلية (ن) وعدد العناصر في المجموعات المشتقة (ر) ، فيمكن التفريق بين أنواع الحساب التوافقي كما يلي :

في المتبادلات ر = ن الاختلاف في المجموعات المشتقة بترتيب العناصر .
في المتوافقات ر ⩽ ن الاختلاف في المجموعات المشتقة بطبيعة العناصر .
في التراتيب ر < ن الاختلاف في المجموعات المشتقة بطبيعة وبترتيب العناصر .

ولتوضيح الفوارق بين الاشكال السابقة لنأخذ المثال التالي :
لتكن المجموعة الاصلية ٣ ٤ ٥

فتكون تباديل المجموعة هي :

٣ ٤ ٥

٣ ٥ ٤

٤ ٣ ٥ وهي مجموعات مشتقة

٤ ٥ ٣ تختلف عن بعضها بعضا

٥ ٣ ٤ بترتيب العناصر فقط.

٥ ٤ ٣

وتكون تراتيب المجموعة المؤلف كل منها من عنصرين هي :

٣ ٤

٣ ٥

٤ ٣ وهي مجموعات مشتقة

٤ ٥ تختلف عن بعضها بعضا

٥ ٣ بطبيعة وترتيب العناصر

٥ ٤

وتكون متوافقات المجموعة المؤلفة من عنصرين هي :

٣ ٤

٣ ٥ وهي مجموعات تختلف عن

٤ ٥ بعضها بعضا فقط بطبيعة العناصر

ونلاحظ بالبداهة أنه يوجد من التراتيب لـ ن عنصرا مأخوذة راء راء أكثر مما يوجد من المتوافقات لان كل متوافقة واحدة تعطي عددا من التراتيب فيما اذا غيرنا ترتيب العناصر الداخلة في تشكيل المتوافقة.

رابعا ــ تشكيل التراتيب :

لمعرفة عدد التراتيب الممكن تشكيله من مجموعة أصلية عدد عناصرها (ن) وباعتبار أن عدد العناصر في كل ترتيب يساوي الى (ر) يمكن استخدام طريقة الصناديق وذلك باعتبار أن عدد الصناديق يساوي (ر) وعدد العناصر الداخلة في كل ترتيب يساوي (ن) • لنأخذ (ن) عنصرا ولنوزعها على (ر) صندوقا بحيث نضع في كل صندوق عنصر واحد فقط •• وهكذا •

فهناك ن طريقة لملء الصندوق رقم ١

و (ن ــ ١) طريقة لملء الصندوق رقم ٢

و (ن ــ ٢) طريقة لملء الصندوق رقم ٣

و (ن ــ ر + ١) طريقة لملء الصندوق رقم ر

وعلى هذا فهناك :

ن (ن ــ ١) طريقة لملء الصندوق الاول والثاني ، و

ن (ن ــ ١) (ن ــ ٢) طريقة لملء الصندوق الاول والثاني والثالث ، و :

ن (ن ــ ١) (ن ــ ٢) •• (ن ــ ر + ١) طريقة لملء الصندوق الاول والثاني والثالث •• والرائي وبذلك نستطيع ترتيب ر عنصرا من بين ن عنصر بعدد من الطرق يساوي :

ت (ن ، ر) = ن (ن ــ ١) (ن ــ ٢) •• (ن ــ ر + ١)

وبضرب طرفي المساواة بـ (ن ــ ر) ! يكون :

ت (ن ، ر) (ن ــ ر) ! = ن(ن ــ ١) (ن ــ ٢) ..
(ن ــ ر + ١) (ن ــ ر) ! = ن!

أو : ت (ن ، ر) = ن ! / (ن ــ ر) !

مثال : كم عدد مؤلف من ثلاثة أرقام متباينة يمكن تشكيله من الارقام الخمسة التالية :

٣ ، ٤ ، ٢ ، ٧ ، ٩

نطبق العلاقة :

ت (ن ، ر) = ت (٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × (٥ ــ ٣ + ١) =
٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقــة

خامسا ــ تشكيل التباديل :

لحساب عدد المتبادلات الممكن تشكيلها من مجموعة أصليــة عدد عناصرها (ن) نقوم بتوزيع (ن) عنصر على عدد من الصناديق يساوي ر = ن ، وبالتعويض في قانون التراتيب في الحالة الخاصة حيث ر = ن ينتج :

لن = ت (ن ، ن) = ت (ن ــ ١) (ن ــ ٢) ..
.. × ٢ × ١ = ن !

مثال : ما هو عدد التباديل الممكن تشكيلها من الارقام الستة

التاليـــة :

٤ ، ٨ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، ٢

$ل٦ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$ تبديل .

سادسا ـ تشكيل التوافيق :

نظرا لان المتوافقات لا تختلف عن بعضها الا بطبيعـــة العناصـــر المكونة لها ، فان كل متوافقة مؤلفة من (ر) عنصرا تشكل عددا من المتبادلات يساوي الى (ر !) تبديل . وعلى هذا فان عدد المتوافقات لمجموعة من ن عنصرا مأخوذة راء راء يساوي الى :

$$ق(ن ، ر) = \frac{ت(ن،ر)}{ر!} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$$

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة أشخاص بين ٨ أشخاص ؟

$$ق(٨ ، ٣) = \frac{٨!}{٣!(٨-٣)!} = ٥٦ \text{ طريقة}$$

ملاحظـــة :

بينا أن ق (ن ، ر) يمثل عدد المجموعات المشتقة المؤلف كل منها من ر عنصرا والتي يمكن تشكيلها من مجموعة أصلية عدد عناصرها ن عنصرا (حيث ن $\geqslant$ ر) . ومن الواضح أنه يوجـــد لكل مجموعـــة مشتقة مجموعة متممة لها بالنسبة الى المجموعة الاصلية التي عدد عناصرها ن وعدد هذه المجموعات المتممة هو ق (ن ، ن ـــ ر) لان

كل منها يتألف من (ن ـ ر) عنصرا ، لذلك نستخلص النتيجة التالية :

$$ق\,(ن ، ر) = ق\,(ن ، ن - ر)$$

فمثلا في المجموعة الاصلية آ ، ب ، حـ ، د ، هـ

يقابل المتوافقتين آ ب ، ب حـ المأخوذتين عنصرين عنصرين

المتوافقين حـ د هـ ، آ د هـ المأخوذة ثلاثـة عناصر

وعلى هذا فان $ق\,(٥ ، ٢) = ق\,(٥ ، ٣)$

وبالعلاقة العامة $ق\,(ن ، ر) = \frac{ن\,!}{ر\,!\,(ن - ر)\,!}$

وباستبدال ر بـ (ن ـ ر) يكون :

$$ق\,(ن ، ن - ر) = \frac{ن\,!}{(ن-ر)\,!\,(ن-ن+ر)\,!} = \frac{ن\,!}{(ن-ر)!\,ر!}$$

وتستخدم هذه الخاصة لتبسيط العمليات الحسابية كما يوضح ذلك المثال التالي :

احسب قيمة $ق\,(١٥ ، ١٢)$

$$ق\,(١٥ ، ١٢) = ق\,(١٥ ، ٣)$$

$$= \frac{١٥\,!}{٣\,!\,(١٥-٣)!} = \frac{١٥\,!}{٣\,!\,١٢\,!} = \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣}{٦} = ٤٥٥$$

تطبيقــات عمليــة

١ ـ نريد انتخاب رئيس ونائب رئيس وأمين صندوق من بين أعضاء مجلس الادارة والبالغ عددهم ٧ أشخاص ، فبكم طريقة يمكن أن يتم ذلك الانتخاب ؟

الحــل :

$$\text{ت}\,(\text{ن،ر}) = \text{ت}\,(\text{٧ ، ٣}) = \frac{\text{ن !}}{(\text{ن}-\text{ر})!} = \frac{\text{٧ !}}{(\text{٧}-\text{٣})!}$$

$$= \frac{\text{٧}\times\text{٦}\times\text{٥}\times\text{٤ !}}{\text{٤ !}} = \text{٧}\times\text{٦}\times\text{٥} = \text{٢١٠ طريقة}$$

٢ ـ بكم طريقة يمكن وضع ٨ كتب على أحد الرفوف ؟

الحــل :

$$\text{ل ٨} = \text{٨ !} = \text{٨}\times\text{٧}\times\text{٦}\times\text{٠٠}\times\text{٢}\times\text{١} = \text{٤٠٣٢٠ طريقة}$$

٣ ـ تتألف جمعية من ٦ أعضاء بينهم شخص معين اسمه سعيد ، نريد انتخاب مجلس مؤلف من رئيس وأمين سر ومحاسب فبكم طريقة يمكن أن يتم هذا الانتخاب على أن يكون سعيد بين الاشخاص المنتخبين ؟

الحــل :

سعيد يشغل أحد المناصب الثلاثة ، لذلك يبقى خمسة أعضــاء ومنصبين •

عدد الطرق = ٣ ت (٥ ، ٢) $= ٣ \frac{٥!}{(٥-٢)!} = ٣ \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣!} =$ ٦٠ طريقــة

٤ ــ حديقة لها ستة أبواب ، بكم طريقة يمكن لشخص أن يدخل الحديقة من أحد الابواب وأن يخرج من باب آخر •

الحــل :

ق (٦ ، ٢) $= \frac{٦!}{٢! \; ٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢! \; ٤!} =$ ١٥ طريقة •

٥ ــ كم عدد من أربع مراتب يمكن تشكيله من الارقام :
٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩

الحــل :

ت (٦ ، ٤) $= \frac{٦!}{(٦-٤)!} = \frac{٦!}{٢!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢!}{٢!}$

= ٣٦٠ طريقــة •

البحث الثاني

نظرية ذي الحدين

يهدف ثنائي نيوتن أو ما يسمى أيضا بدستور ذي الحدين الى اعطاء منشور التركيب $(ب + حـ)^{ن}$ • لنفرض أن ب و حـ عددان حقيقيان ولنعين التراكيب التالية :

$$(ب + حـ)^{١} = ب + حـ$$

$$(ب + حـ)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب حـ + حـ^{٢}$$

$$(ب + حـ)^{٣} = ب^{٣} + ٣ ب^{٢} حـ + ٣ ب حـ^{٢} + حـ^{٣}$$

$$(ب + حـ)^{٤} = ب^{٤} + ٤ ب^{٣} حـ + ٦ ب^{٢} حـ^{٢} + ٤ ب حـ^{٣} + حـ^{٤}$$

$$(ب + حـ)^{٥} = ب^{٥} + ٥ ب^{٤} حـ + ١٠ ب^{٣} حـ^{٢} + ١٠ ب^{٢} حـ^{٣} + ٥ ب حـ^{٤} + حـ^{٥}$$

من نشر المتطابقات السابقة ، يمكن استنتاج الملاحظات التالية :

١ ــ ان عدد حدود كل منشور يساوي الى قوة القوس زائــدا واحد • وبشكل عام يساوي عدد حدود المنشــور $(ب + حـ)^{ن}$ الى (ن + ١) حدا •

٢ ـ تبـدأ حـدود المنشـور بـ $(ب^{ن})$ وتنتهـي بـ $(حـ^{ن})$ ويساوي مجموع الاسس في كل حد الى (ن) أي يأخذ كل حد الشكل العام $ب^{ن-ر}\, حـ^{ر}$ مضروبا بعدد ثابت نرمز له بـ آ •

وهكذا فحسب ما سبق يأخذ منشور $(ب + حـ)^{ن}$ الشـكل التالي :

$$(ب + حـ)^{ن} = ب^{ن} + آ_{١}\, ب^{ن-١}\, حـ^{١} + آ_{٢}\, ب^{ن-٢}\, حـ^{٢} + \cdots$$

$$آ_{ر}\, ب^{ن-ر}\, حـ^{ر} + \cdots + آ_{ن-١}\, ب^{١}\, حـ^{ن-١} + آ_{ن}\, حـ^{ن}$$

ولكي تتحدد جميع عناصر المنشور يلزم تحديد الثوابت $آ_{١}$ ، $آ_{٢}$، $آ_{٣}$ •• $آ_{ن}$ لنعد الى المتطابقة :

$$(ب + حـ)^{٤} = (ب + حـ)(ب + حـ)(ب + حـ)(ب + حـ)$$

ولنبحث كيف حصلنا على الحد ٤ $ب^{٣}$ حـ ؟ • لقد حصلنا على $ب^{٣}$ بضرب ثلاثة من الاقواس الاربعة ببعضها ، أي أن هناك ق (٤ ، ٣) طريقة للحصول على $ب^{٣}$ ، أي ق (٤ ، ٣) = $\frac{٤!}{٣!(٤-٣)!}$ = ٤

وهو الثابت المتعلق بهذا الحد •

كذلك حصلنا على $ب^{٢}$ بضرب اثنين من الاقواس الاربعة ببعضها، أي أن هناك ق (٤ ، ٢) طريقة للحصول على $ب^{٢}$ ، أي ق (٤ ، ٢)=

$\frac{٤!}{٢!(٤-٢)!}$ = ٦ وهو الحد الثابت المتعلق بـ ($ب^٢$) ، وكذلك الامر

بالنسبة لـ $ب^ر$ فنحصل عليه بضرب ر قوسا من بين الـ ن قوسا أي أن هناك ق (ن ، ر) طريقة للحصول على هذا الحد .

وبناء على ما أوضحنا ، وبالاستعانة بمفهوم المتوافقات ، يمكن كتابة منشور $(ب + حـ)^٤$ على النحو التالي :

$$(ب + حـ)^٤ = ق(٤ ، ٠) ب^٤ حـ^٠ + ق(٤ ، ١) ب^٣ حـ^١ +$$
$$ق(٤ ، ٢) ب^٢ حـ^٢ + ق(٤ ، ٣) ب^١ حـ^٣ + ق(٤ ، ٤) ب^٠ حـ^٤$$

وبشكل عام ، فان منشور التركيب $(ب + حـ)^ن$ يساوي :

$$(ب + حـ)^ن = ق(ن ، ٠) ب^ن حـ^٠ + ق(ن ، ١) ب^{ن-١}$$
$$حـ^١ + ق(ن ، ٢) ب^{ن-٢} حـ^٢ + ... + ق(ن ، ر) ب^{ن-ر}$$
$$حـ^ر + .. + ق(ن ، ن-١) ب^١ حـ^{ن-١} + ق(ن ، ن) ب^٠ حـ^ن$$

تسمى العلاقة الاخيرة ثنائي الحد ، أو نظرية ذي الحدين ، وتستعمل لايجاد منشور مجموع حدين مرفوعين الى قوة صحيحة موجبة ، وكمثال على ذلك سنقوم باستعمال العلاقة السابقة لايجاد منشور $(١ + ١)^ن$:

$$(١ + ١)^{ن} = \text{ق}(ن ، ٠) + \text{ق}(ن ، ١) + \text{ق}(ن ، ٢) + ٠٠ + \text{ق}(ن ، ن) = ٢^{ن}$$

يطلق على المقادير ق (ن ، ٠) ، ق (ن ، ١) ، ق (ن ، ٢)٠٠٠ ق (ن ، ن) بعوامل ذي الحدين ، وتتصف هذه العوامل بالخواص التاليـــة :

آ ــ يساوي مجموع العوامل في دستور ذي الحدين $٢^{ن}$ وذلك بتبديل ب = ١ ، حـ = ١ في منشور ذي الحدين •

ب ــ يساوي مجموع العوامل الفردية الى مجمــوع العوامــل الزوجية في دستور ذي الحــدين • ويبرهن عــلى ذلك بافتراض ب = ١ و حـ = ــ ١ :

$$(١ - ١)^{ن} = ٠ = \text{ق}(ن ، ٠) - \text{ق}(ن ، ١) + \text{ق}(ن ، ٢) - \text{ق}(ن ، ٣) + (-١)^{ر}\ \text{ق}(ن ، ر) + ٠٠٠ + (-١)^{ن}\ \text{ق}(ن ، ن) \text{ •}$$

وتكتب هذه العلاقة على الشكل :

$$\text{ق}(ن ، ٠) + \text{ق}(ن ، ٢) + \text{ق}(ن ، ٤) + ٠٠ + \text{ق}(ن ، ٢و)$$
$$= \text{ق}(ن ، ١) + \text{ق}(ن ، ٣) + \text{ق}(ن ، ٥) + ٠٠ + \text{ق}(ن ، ٢ف + ١)$$

حيث ن = ٢ و ، ن = ٢ف + ٢ اذا كان ن زوجياً •

وحيث ن ــ ١ = ٢ و ، ن = ٢ ف + ١ اذا كان ن فرديا •

٥ ـ يتساوى العاملان المتساويي البعد عن الحد الاول والحد الاخير : ان عامل الحد الذي يوجد قبله (ر) حدا هو ق (ن ، ر) ، وأما الحد الذي بعده (ر) حدا فهو مسبوق بـ (ن ـ ر) حـدا وعامله ق (ن ، ن ـ ر) ومن المعلوم أن ق (ن ، ن ـ ر) = ق(ن،ر) وذلك لان :

$$\frac{ن!}{ر!(ن-ر)!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!(ن-ن+ر)!} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$$

٤ ـ تمكن العلاقة ق(ن،ر) = ق(ن-١،ر) + ق(ن-١،ر-١) من معرفة معاملات منشور ذي الحدين المرفوع الى القوة (ن) وذلك عند معرفة معاملات منشور ذي الحدين المرفوع الى القوة (ن - ١) . ويعرض هذا الحساب في جدول يسمى بمثلث باسكال حيث نضع في كل سطر معاملات المنشور المرفوع الى قوة معينة ، أما الاعمدة فتمثل ترتيب المعاملات في المنشور . وهكذا يظهر المعامل ق (ن ، ر) في تقاطع السطر (ن) والعمود (ن + ١) . وحسب العلاقة السابقة فان هـذا المعامل هو مجموع معاملين يظهران على السطر (ن - ١) والعمود (ر) والسطر (ن - ١) والعمود (ر + ١) ويمكن حساب بقيـة المعاملات بالتدريج . ويبين الشكل التالي مثلث باسكال لمنشور ذي الحدين لبعض القوى البسيطة .

مثلث باسكال

ن	المعاملات	ق (ن، ٠)	ق (ن، ١)	ق (ن، ٢)	ق (ن، ٣)	ق (ن، ٤)	ق (ن، ٥)	ق (ن، ٦)	ق (ن، ٧)
٠	(ب + حـ)^{٠}	١							
١	(ب + حـ)	١	١						
٢	(ب + حـ)^{٢}	١	٢	١					
٣	(ب + حـ)^{٣}	١	٣	٣	١				
٤	(ب + حـ)^{٤}	١	٤	٦	٤	١			
٥	(ب + حـ)^{٥}	١	٥	١٠	١٠	٥	١		
٦	(ب + حـ)^{٦}	١	٦	١٥	٢٠	١٥	٦	١	
٧	(ب + حـ)^{٧}	١	٧	٢١	٣٥	٣٥	٢١	٧	١

ونستطيع استخدام مثلث باسكال مثلا في ايجاد منشور (س+٣)^{٦}:

(س + ٣)^{٦} = س^{٦} + ٦ س^{٥} (٣) + ١٥ س^{٤} (٣)^{٢} + ٢٠س^{٣} (٣)^{٣} +

١٥ س^{٢} (٣)^{٤} + ٦س (٣)^{٥} + س^{٠} (٣)^{٦}

الفصل الرابع

نظريـــة المجموعـــات

تحتل نظرية المجموعات أهمية متزايدة في الرياضيات لانها تشكل الاساس النظري المشترك الذي تعتمد عليه مختلف فروع الرياضيات الحديثة ، كما أن لهذه النظرية تطبيقات عديدة في الابحاث الاقتصادية والاحصائية ، وتعد النظرية البيانية وأبحاثها المتنوعة كالطريق الامثل والبرمجة الديناميكية والمسار الحرج تطبيقات هامة لنظرية المجموعات.

سندرس المجموعات بصورة موجزة في البحثين التاليين :

البحث الاول : مفاهيم أساسية في المجموعات .

البحث الثاني : العمليات على أجزاء المجموعة .

البحث الاول

مفاهيم أساسية في المجموعــات

سنتناول في هــذا البحث بعض المفاهيم الاساسـية في نظريــة المجموعات ، فبعد تعريف المجموعة وتحديدها وتمثيلها البياني سننتقل للتعرف على العلاقة بين عناصر المجموعة والعلاقة بين أجزاء المجموعة مارين بدراسة بعض المجموعات الاساسية كالمجموعة الخالية والكلية ومجموعة أجزاء المجموعة ، وبذلك سيتضمن هــذا البحث النقــاط التاليــة :

أولا : مفهوم المجموعة .

ثانيا : تعريف المجموعة .

ثالثا : تمثيل المجموعة .

رابعا : تحديد المجموعة .

خامسا : المجموعة الخالية والمجموعة الكلية .

سادسا : علاقة الانتماء .

سابعا : المساواة بين مجموعتين .

ثامنا : علاقــة الاحتواء .

تاسعا : مجموعة أجزاء المجموعة .

اولا ــ مفهوم المجموعة :

يستخدم الانسان العادي في حياته اليومية مفهوم المجموعة دون أن يقصد بالضرورة ذلك المفهوم الرياضي المحدد ، فعند الحديث عن أعضاء فريق كرة القدم ، وحملة الشهادة الثانوية ، والاشياء الموجودة في المحفظة ، والارقام الزوجية الموجبة ، وأزهار باقة من الورد ...الخ يستعمل مفهوم المجموعة بصورة ضمنية . وواضح من هذه الامثلة أن المجموعة قد تتألف من عدد من الاشخاص أو الارقام أو الحروف أو الاشياء أو الازهار الخ .. وقد تكون هذه المكونات من نوع واحد أو من أنواع مختلفة ، ومن الممكن استخدام بعض الكلمات التي توحي بفكرة المجموعة كالفريق والفرقة والزمرة والجماعة ، وقد اتفق علميا على كلمة مجموعة كمصطلح علمي عام يقوم مقام أمثال هذه الكلمات وعلى هذا المفهوم البدائي البسيط قامت نظرية المجموعات وأخذت تدريجياً شكلا مجردا يصعب تعريفه .

ثانيا ــ تعريف المجموعة :

لا يوجد تعريف محدد للمجموعة ويمكن أن نقول بصورةمبدئية بأن المجموعة : اجتماع لعدد من الاشياء المتباينة المشتركة مع بعضها بعضا بصفة أو بعدة صفات ، وان أردنا الدقة في التعريف فليس لنا أفضل مما كتبه مؤسس هذه النظرية ، العالم الرياضي جورج كانتور حيث كتب « المجموعة اجتماع في كل لعدد من الاشياء التي نحسها بحواسنا أو نتصورها بأذهاننا ، وهي كائنات معينة تمام التعيينومختلف بعضها عن بعض » وينتج من هذا التعريف الملاحظات الاربع التالية :

آ ــ يستقل مفهوم المجموعة عن مفهوم العناصر المكونة لها ،

فليس هناك تمييز بين عناصر المجموعة كما أنه ليس هناك أي نظام أو ترتيب ضروريين بين أفراد المجموعة ٠

ب ـ يجب أن تكون هناك قاعدة تتمكن بواسطتها من التقرير فيما اذا كان شيء من الاشياء يقع ضمن هذه المجموعة أو أنه غريب عنها ، وقد تكون هذه القاعدة بيانا بالاشياء الداخلة في المجموعة المكونة من (كرسي ، طاولة ، مسطرة ، قلم ، دفتر) ٠

ح ـ يختلف أفراد المجموعة بعضهم عن بعض ، وهذا يعني عدم وجود تكرار في أفراد هذه المجموعة ، فاذا وجد عنصر من عناصرها مكررا فانه يمثل فردا واحدا في المجموعة المذكورة ٠

د ـ يجب أن تكون الاشياء الداخلة في المجموعة معرفة تعريفا دقيقا وكليا ولا تخضع للحكم أو التقدير الشخصي ، فعند تحديدنا لمجموعة الاشجار في محافظة اللاذقية يجب تعريف الشجرة وحدود المحافظة، كما أن تحديدمجموعة الطلابالمجتهدين أو مجموعة المدخنين في مجتمع من المجتمعات يختلف باختلاف الفاحص والزمان والمكان لاعتماده على الحكم والتقدير الشخصيين ٠

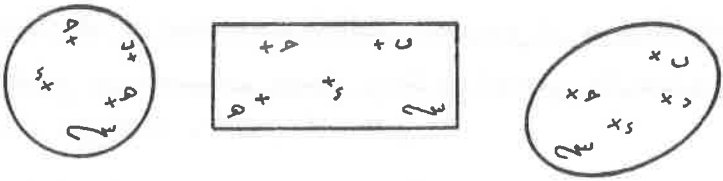
تتألف كل مجموعة من عدد من المكونات يدعى كل منها عنصرا ، فأحمد عنصر في مجموعة اللاعبين المكونة لفريق كرة القدم ، والرقم ٨ عنصر في مجموعة الاعداد الزوجية ، والقلم عنصر في مجموعة الاشياء الموجودة في المحفظة وهكذا ٠٠ وليس من الضروري أن يكون العنصر مؤلفا من شيء واحد بل قد تكون مجموعة من الاشياء عنصرا في مجموعة أخرى فنقول مثلا : سعيد عنصر من مجموعة سكان حي القصاع وحي القصاع عنصر من مجموعة أحياء دمشق ، ومدينة دمشق عنصر من مجموعة المدن السورية وهكذا ٠٠

ومن المجموعات الهامة في الرياضيات نذكر مجموعة الاعداد الطبيعية ، ومجموعة الاعداد الصحيحة ، ومجموعة الاعداد العادية ، ومجموعة الاعداد الحقيقية •

ثالثا ـ تمثيل المجموعة :

نرمز عادة لمجموعة من المجموعات بأحد الاحرف الكبيرة (سـ ، ع ، صـ) ولعنصر من عناصر المجموعة بأحد الاحرف الصغيرة (س ، ع ، ص ، •••) •

تمثل المجموعات بيانيا باستخدام مخططات (اولر ـ ڤن) بأشكال هندسية مختلفة كالدائرة أو المستطيل أو الخط المنحني المغلق ، ونرمز لعناصر المجموعة بنقاط داخل الاشكال السابقة •



رابعا ـ تحديد المجموعة :

تحدد المجموعة عندما نتمكن من القول بأن عنصرا ما يشكل أحد عناصر المجموعة أو لا يشكل عنصرا من عناصرها وعلى ذلك يمكن تحديد المجموعة باحدى طريقتين :

طريقة البيان : وتتلخص باعطاء بيان كامل للعناصر المؤلفة

للمجموعة ، مثلا :

$$\text{س} = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ \}$$

وطريقة التعريف : وتقتضي تعريف احدى الخواص المشتركة لعناصر المجموعة كأن نكتب مثلا :

$$\text{س} = \{ \text{س} \}$$

حيث س أحد الاعداد الطبيعية الستة الاولى •

وتستعمل الطريقة الثانية لتحديد المجموعات غير المنتهية ، ومع ذلك فمن الممكن أن يتم ذلك بكتابة بعض عناصر هذه المجموعة متبوعة بنقاط كثيرة شريطة ألا تؤدي هذه الكتابة الى التباس في تحديد العناصر المؤلفة للمجموعة ، فمثلاً يمكن كتابة مجموعة الاعداد الطبيعية على الشكل التالي :

$$\text{ط} = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، \cdots \}$$

وتحتوي هذه المجموعة كما هو واضح على عدد غير منته من العناصر • ويمكن بالطريقة نفسها تمثيل مجموعة الاعداد الصحيحة والعادية والحقيقية •

خامسا ـ المجموعة الخالية والمجموعة الكلية :

يمكن تعريف مجموعة ما بتحديد خاصة معينة والبحث عن العناصر التي تحقق هذه الخاصة ، فلو فرضنا أننا لم نجد أي عنصر متمتع بهذه الخاصة فاننا نقول بأن هذه الخاصة تعرف مجموعة خالية من العناصر نسميها تجاوزا بالمجموعة الخالية ونرمز لها بالحرف

اليوناني ϕ ومثال ذلك مجموعة الاعداد الطبيعية غير الصحيحة وكذلك مجموعة الاعداد الفردية التي تقبل القسمة على (٢) •

أما فيما يتعلق بالمجموعة الكلية أو الاساسية ، فمن المعروف أن لكل علم من العلوم الرياضية مجموعة من الكائنات الرياضية نستنتج منها بقية الاشياء التي تدخل دراسة خواصها ضمن نطاقه ، وتسمى هذه المجموعة المجموعة الكلية ونرمز لها بـ ك والمجموعة الكلية هي كل مجموعة تهمنا عناصرها أو أجزاؤها أثناء دراسة معينة ، مثال ذلك مجموعة الاعداد الطبيعية التي ندرس من خلالها مبادىء علم الحساب •

سادسا ـ علاقة الانتماء :

يوجد بين المجموعة وعناصرها علاقة تسمى علاقة الانتماء ، فاذا كان س عنصرا من عناصر المجموعة سـ فاننا نكتب هذه العلاقة بالشكل س $\in$ سـ ونقرأ س ينتمي الى سـ ، أما اذا لم يكن س عنصرا من عناصر المجموعة سـ فاننا نكتب س $\notin$ سـ ونقرأ س لاينتمي الى المجموعة سـ ، وهكذا فان $\in$ تعني الانتماء و $\notin$ تعني عدم الانتماء •

تتصف علاقة الانتماء بأنها غير متعدية ، فاذا كان :

هـ : أحد سكان مدينة دمشق •

د : مدينة دمشق باعتبارها مجموعة من السكان القاطنين فيها •

م : مجموعة المدن السورية •

فيمكننا أن نكتب هـ ∈ د ، د ∈ م ولكننا لا نستطيع كتابة هـ ∈ م بل على العكس فان هـ ∉ م لأن أحد سكان مدينة دمشق لا ينتمي الى مجموعة المدن السورية .

سابعا ـ المساواة بين مجموعتين :

تتساوى المجموعتان سـ و ع اذا تكونتا تماما من العناصر نفسها ، وهذا ما يمكن كتابته على الشكل التالي سـ = ع ، فاذا كانت المجموعتان سـ و ع متساويتين ، وكان س ينتمي الى سـ فان ذلك يتطلب أن ينتمي س الى المجموعة ع أيضا ، ونكتب باستخدام رمز التكافؤ :

اذا كان سـ = ع فان س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع

أما خواص علاقة المساواة بين مجموعتين فهي ثلاث :

ـ علاقة المساواة انعكاسية : سـ = سـ مهما تكن المجموعة سـ

ـ علاقة المساواة تناظرية : اذا كان سـ = ع فان ع = سـ

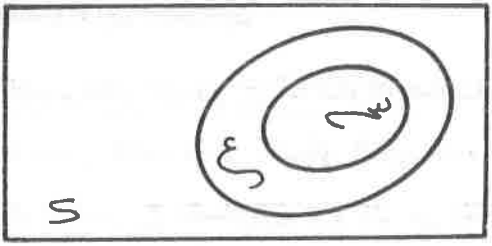
ـ علاقة المساواة متعدية : اذا كان سـ = ع و ع = صـ فان سـ = صـ

هذا ويبرهن على تساوي مجموعتين عادة بواسطة علاقة الاحتواء .

ثامنا ـ علاقة الاحتواء :

اذا كانت سـ و ع مجموعتين ، وكان كل عنصر من عناصر سـ هو عنصر من عناصر ع فتكون المجموعة سـ محتواة في

المجموعة ع وتكون سـ جزءاً أو مجموعة جزئية من المجموعة ع ، ولكتابة هذه العلاقة فاننـــا نستخدم رمز الاحتواء سـ ⊆ ع أو ع ⊇ سـ ونقول ان سـ محتواة في ع أو أن ع تحتوي سـ وتمثل علاقة الاحتواء بيانياً كما هو واضح في الشكل التالي .



وهكذا فاذا كانت سـ مجموعة جزئية من ع فـــان كل عنصر من عناصر سـ ينتمي الى ع . وبمعنى آخـــر ، اذا انتمى س الى سـ فان ذلك يتطلب ان ينتمي س الى ع ، أي ان العــلاقتين س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع متكافئتان (حيث يقرأ الرمز ⇐ يقتضي أو يتطلب) .

يستعمل الرمز المنطقي سـ ⊂ ع اذا كان كل عنصر من سـ هو عنصر من ع وكان في المجموعة ع عناصر غير موجودة في المجموعة سـ ، ونقول عندها ان سـ مجموعة جزئية من ع بالمعنى الدقيق ، اما اذا لم نكن على يقين من وجود عناصر من ع غـير موجودة في سـ كتبنا سـ ⊆ ع ونقول ان الرمز المنطقي ⊆ يمثل الاحتواء بالمعنى الواسع ، مثال :

سـ = { ب ، حـ ، د }

ع = { ب ، حـ ، د ، هـ ، و }

نلاحظ بسهولة أن سـ $\subset$ ع احتواء بالمعنى الدقيق . هذا وان الشرط اللازم والكافي لتساوي مجموعتين سـ و ع هو أن يكون في وقت واحد سـ $\subseteq$ ع و ع $\subseteq$ سـ .

حالات خاصة :

يمكن البرهان على أن المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من أية مجموعة سـ أي :

$$\phi \subseteq \text{سـ}$$

اذا كان س عنصرا من سـ ، فان المجموعة الجزئية التي تضم العنصر س هي مجموعة جزئية من سـ أي :

$$\{\text{س}\} \subseteq \text{سـ}$$

وهكذا فان العلاقتين :

$$\text{س} \in \text{سـ}$$

$$\{\text{س}\} \subseteq \text{سـ}$$

هما علاقتان متكافئتان .

هذا وتتصف علاقة الاحتواء بالخواص الثلاث التالية :

آ ـ علاقة الاحتواء انعكاسية : مهما تكن المجموعة سـ فان سـ $\subseteq$ سـ ، اي ان المجموعة سـ هي جزء من المجموعة سـ نفسها .

ب ـ علاقة الاحتواء متعدية : اذا كانت سـ مجموعة جزئية من ع ، و ع مجموعة جزئية من صـ ، فان كل عنصر س ينتمي الى سـ ينتمي الى ع وينتمي الى صـ ، وعلى هذا فان سـ هي مجموعة جزئية من صـ أي :

(سـ ⊇ ع و ع ⊇ صـ) ⇐ سـ ⊇ صـ

حـ ـ علاقة الاحتواء غير تناظرية : اذا كانت سـ مجموعة جزئية من ع ، و ع مجموعة جزئية سـ ، فان ذلك يؤدي الى ان كل عنصر من سـ هو عنصر من ع وكل عنصر من ع هو عنصر من سـ وبذلك فان المجموعتين سـ و ع متساويتان ، أي :

(سـ ⊇ ع ، و ع ⊇ سـ) ⇔ سـ = ع

تاسعا ـ مجموعة أجزاء المجموعة :

لتكن سـ مجموعة غير خالية ، يمكن اختيار فئة من عناصر المجموعة سـ وتشكيل مجموعة جديدة نسميها مجموعة جزئية من سـ . لنفرض أننا شكلنا من سـ كل المجموعات الجزئية الممكنة بدءا من المجموعة الخالية وانتهاء بالمجموعة سـ نفسها التي نسميها المجموعة الجزئية التامة ، اذا شكلنا مجموعة جديدة تتألف عناصرها من كل المجموعات الجزئية لـ سـ ، فاننا نحصل على مجموعة جديدة نسميها مجموعة الاجزاء لـ سـ ونرمز لها بـ خ (سـ) .

مثال : تتألف أجزاء المجموعة : سـ = { ب ، حـ ، د }

من :

المجموعة الخالية φ

والمجموعات الجزئية وحيدة العنصر {ب} ، {حـ} ، {د} .

والمجموعات الجزئية ذات العنصرين : {ب ، حـ} ، {ب ، د} ، {حـ ، د} .

والمجموعة الجزئية التامة : {ب ، حـ ، د}

لذلك فان :

ح (س) = { φ ، {ب} ، {حـ} ، {د} ، {ب ، حـ} ، {ب ، د} ، {حـ ، د} ، {ب ، حـ ، د} }

وبشكل عام فاذا كانت س مجموعة جزئية من ك ، فيمكننا أن نكتب العلاقات التالية :

س ⊆ ك و س ∈ ح (ك)

ك ⊆ ك ⇔ ك ∈ ح (ك)

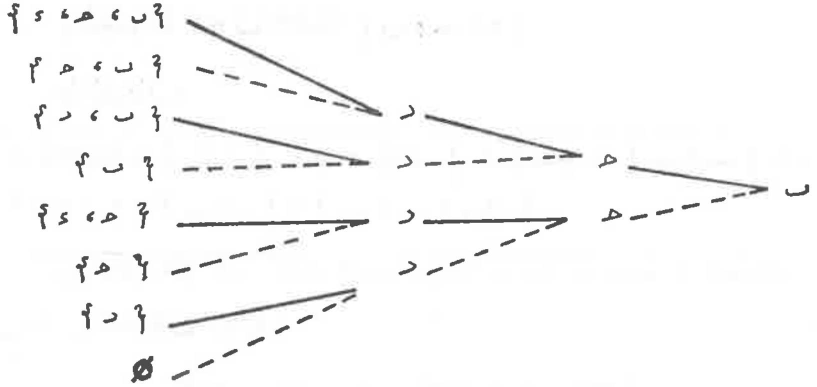
φ ⊆ ك ⇔ φ ∈ ح (ك)

ولتحديد المجموعة ح (ك) من اللازم تحديد المجموعات الجزئية للمجموعة ك جميعها ، ويمكن الحصول على هذه المجموعات وتمثيلها بيانيا باتباع احدى الطريقتين التاليتين :

آ ــ طريقة شجرة الاجزاء :

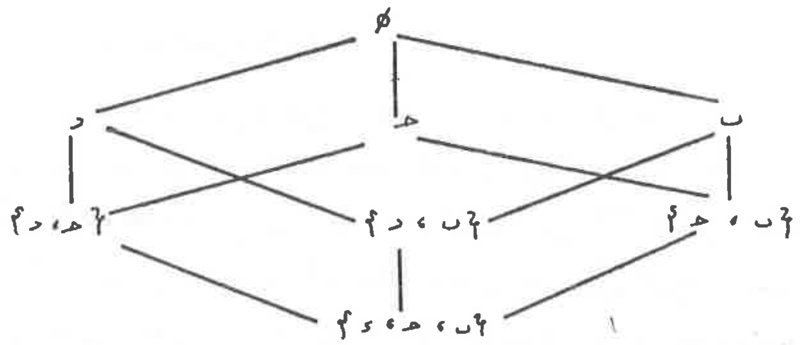
تعتمد هذه الطريقة على احتفاظ أو استبعاد كل عنصر لاختيار وتحديد انتماء أو عدم انتماء هذه العناصر الى المجموعة الجزئية . لتكن المجموعة ك = {ب ، حـ ، د} المكونة من ثلاثة عناصر ، فاذا احتفظنا بالعنصر ب مثلنا ذلك بخط متصل يدل على انتماء العنصر الى احدى المجموعات الجزئية ، واذا استبعدنا العنصر ب مثلنا

ذلك بخط متقطع يدل على عدم انتماء العنصر الى أي من المجموعات الجزئية ، وبتكرار هذه العملية بشكل متتال بالنسبة لجميع عناصر المجموعة ، فاننا نحصل على كل المجموعات الجزئية بشكل نسميه شجرة الاجزاء :



٢ ـ طريقة مخطط مجموعة الاجزاء :

تعتمد هذه الطريقة على علاقة الاحتواء الكائنة بين مختلف مجموعات الاجزاء ، وتمثل علاقة الاحتواء بخط مستقيم ، كما نقرأ هذه العلاقة بشكل تنازلي من سطر لآخر ، ويحتوي كل سطر على مجموعات جزئية لها العدد نفسه من العناصر :



لقد تمكنا من حساب عدد عناصر مجموعة الاجزاء ح { ك } ، استنادا الى الطريقتين السابقتين ، في طريقة شجرة الاجزاء كل اختيار لاحد عناصر المجموعة هو ثنائي : أي هناك وضعان مختلفان بالنسبة لكل عنصر ، فبالنسبة للعنصر الاول (ب) هناك امكانيتان : اما الاحتفاظ بالعنصر ب ، أو استبعاده .

وبالنسبة للعنصر الثاني (حـ) هناك امكانيتان : اما الاحتفاظ بالعنصر حـ أو استبعاده .

وبالنسبة للعنصر الثالث (د) هناك امكانيتان : اما الاحتفاظ بالعنصر د أو استبعاده .

وبأخذ العنصرين ب ، حـ معا والوضعين الممكنين لكل منهما فان هناك $٢ \times ٢ = ٢^{٢}$ وضعا ممكنا ، وبأخذ العناصر الثلاثة ، ب ، حـ ، د والوضعين الممكنين لكل منها فهناك $٢\times٢\times٢ = ٢^{٣}$ وضعا ممكنا . وبشكل عام ، اذا كان عدد عناصر المجموعة ك يساوي (ن) فان عدد عناصر مجموعة الاجزاء يساوي $٢^{ن}$.

المبحث الثاني

العمليــات على أجزاء المجموعـة

يمكن القيام ببعض العمليات على أجزاء المجموعة كالاجتمـاع والتقاطع والاتمام وفضل مجموعة عن أخرى والفرق التناظري • سنناقش العمليات السابقة وسنحلل خواصهـا كمـا سندرس بعض الموضوعات المتعلقة بهذه العمليات كقانونـي دومورغـان • وبذلك ستشمل نقاط هذا البحث :

أولا : العمليات الاساسية على أجزاء المجموعة •

ثانيا : خواص العمليات الاساسية على أجزاء المجموعة •

ثالثا : قانوني دومورغان •

اولا ـ العمليات الاساسية على اجزاء المجموعة :

لتكن س و ع مجموعتين جزئيتين من مجموعة منتهية ك ، من الممكن بالطبع ذكر عناصر المجموعتين س و ع لان عدد عناصر ك محدد ومنته ، كما يمكن أيضا تعريف الخاصة أو الخواص المشتركة لكل من هاتين المجموعتين بافتراض أن س تحقق الخاصة م و ع تحقق الخاصة ل •

يمكن اجراء ثلاثة أنواع من العمليات على المجموعتين الجزئيتين سـ و عـ وهي :

١ ـ التقاطع : نحصل على المجموعة الجزئية التي تحقق عناصرها في الوقت نفسه الخاصتين م و ل بواسطة عملية تقاطع المجموعتين سـ و عـ . نرمز لعملية التقاطع بالرمز ∩ وللمجموعة المعرفة بهذه العملية سـ ∩ عـ (سـ تقاطع عـ) هذا وان عناصر سـ ∩ عـ هي في وقت واحد عناصر من سـ ومن عـ ، والعلاقات التالية متكافئة :

س ∈ (سـ ∩ عـ) .

س ∈ سـ و س ∈ عـ

٢ ـ الاجتماع : نحصل على المجموعة الجزئية التي تحقق عناصرها الخاصة م أو الخاصة ل بواسطة عملية اجتماع المجموعتين سـ و عـ ونرمز لعملية الاجتماع بالرمز ∪ وللمجموعة المعرفة بهذه العملية (سـ ∪ عـ) (سـ اجتماع عـ) ، هذا وان عناصر سـ ∪ عـ هي اما عناصر من سـ او عناصر من عـ ، والعلاقات التالية متكافئة :

س ∈ (سـ ∪ عـ)

س ∈ سـ او س ∈ عـ

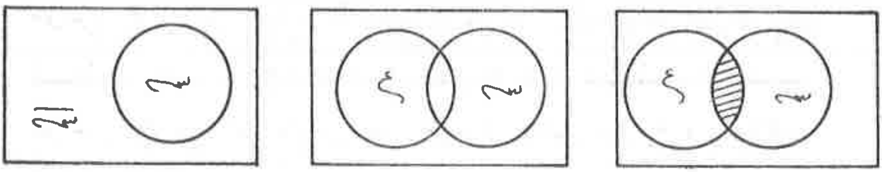
ومن الممكن ترتيب المجموعات التالية وفق علاقة الاحتواء كما يلي :

$$\phi \subseteq \text{س} \cap \text{ع} \subseteq \text{س} \subseteq \text{س} \cup \text{ع} \subseteq \text{ك}$$

$$\phi \subseteq \text{س} \cap \text{ع} \subseteq \text{ع} \subseteq \text{س} \cup \text{ع} \subseteq \text{ك}$$

٣ ـ الاتمام : من الممكن تعريف مجموعات جزئية أخرى لاتحقق عناصرها أيا من الخاصتين م أو ل ، هذه المجموعات تسمى المجموعات المتممة أو المكملة . تتألف المجموعة الجزئية المتممة لـ س في ك من جميع العناصر التي لا تنتمي الى س ولكنها تنتمي الى ك ونرمز لهذه المجموعة $\overline{\text{س}}$. كما ان المجموعات المتممة لـ ع و س ∩ ع و س ∪ ع هي على التوالي $\overline{\text{ع}}$ و $\overline{(\text{س} \cap \text{ع})}$ و $\overline{(\text{س} \cup \text{ع})}$. اما متممة المجموعة الكلية ك فهي المجموعة الخالية ϕ وبالعكس فان متممة ϕ هي ك اي $\overline{\phi} = \text{ك}$.

ومن الممكن تمثيل العمليات الثلاث السابقة بيانيا كما في الشكل التالي :



ـ التقاطع ـ　ـ الإجتماع ـ　ـ الإتمام ـ

ثانيا ـ خواص العمليات الاساسية على أجزاء المجموعة :

تحقق عمليات التقاطع والاجتماع والاتمام بعض الخواص نستعرضها على التوالي :

١ ــ خواص عملية التقاطع :

تتصف عملية التقاطع ببعض الخواص الممكن تلخيصها بالعلاقات التالية :

– الخاصة التبديلية : سـ ∩ ع = ع ∩ سـ

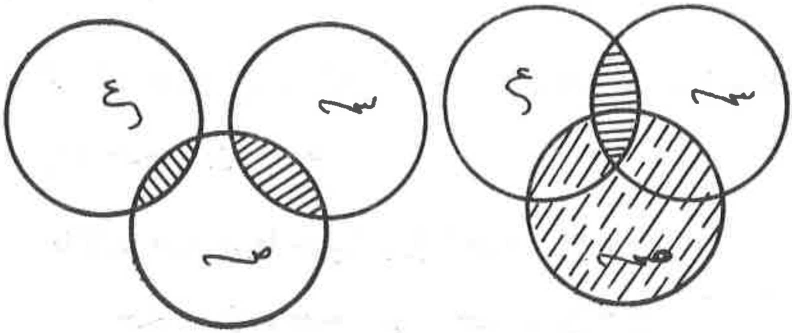
– الخاصة التجميعية : (سـ ∩ ع) ∩ صـ = سـ ∩ (ع ∩ صـ)

ــ الخاصة التوزيعية بالنسبة للاجتماع :

(سـ ∩ ع) ∪ صـ = (سـ ∪ صـ) ∩ (ع ∪ صـ)

– خاصة التكافؤ : سـ ∩ سـ = سـ

– وجود العنصر الحيادي ك : سـ ∩ ك = سـ



٢ ــ خواص عملية الاجتماع :

تتصف عملية الاجتماع ببعض الخواص الممكن تلخيصها بالعلاقات التالية :

ـ الخاصة التبديلية : $\text{س} \cup \text{ع} = \text{ع} \cup \text{س}$

ـ الخاصة التجميعية: $(\text{س} \cup \text{ع}) \cup \text{ص} = \text{س} \cup (\text{ع} \cup \text{ص})$

ـ الخاصة التوزيعية بالنسبة للتقاطع :

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \cap \text{ص} = (\text{س} \cap \text{ص}) \cup (\text{ع} \cap \text{ص})$$

ـ خاصة التكافؤ $\text{س} \cup \text{س} = \text{س}$

ـ وجود العنصر الحادي ϕ $\text{س} \cup \phi = \text{س}$

هذا ومن الممكن ملاحظة خواص عمليتي التقاطع والاجتماع اعتمادا على مخططات أولر ــ فن والبرهان عليها بواسطة علاقة الاحتواء المزدوجة ، بالاضافة الى ذلك يمكن تمييز الحالات الخاصة التالية :

اذا كانت س و ع منفصلتين فان $\text{س} \cap \text{ع} = \phi$ وان $\text{س} \cup \text{ع} \subseteq \text{ك}$

اذا كانت س و ع متكاملتين ($\overline{\text{س}} = \text{ع}$) فان $\text{س} \cap \text{ع} = \phi$

وان $\text{س} \cup \text{ع} = \text{ك}$

اذا كانت س مجموعة جزئية من ع ($\text{س} \subseteq \text{ع}$) فان

$$\text{س} \cap \text{ع} = \text{س} \quad \text{و} \quad \text{س} \cup \text{ع} = \text{ع}$$

$$\overline{\text{س}} \cup \text{ع} = \text{ك} \quad \text{و} \quad \overline{\text{س}} \cap \text{س} = \phi$$

اذا كانت $\text{س} = \phi$ فان $\phi \cap \text{ع} = \phi$

اذا كانت $\text{ع} = \text{ك}$ فان $\text{س} \cup \text{ع} = \text{ك}$

اذا كان $\text{سـ} \cup \text{ع} = \text{ك}$ و $\text{سـ} \cap \text{ع} = \phi$ فالعلاقات التالية متكافئة :

$$\text{سـ} = \overline{\text{ع}}$$

$$\text{ع} = \overline{\text{سـ}}$$

٣ ـ خواص عملية الاتمام :

ينتج من تعريف عملية الاتمام ان $\overline{(\overline{\text{سـ}})} = \text{سـ}$ أي أن الاتمام المزدوج يؤدي للوصول الى المجموعة الاصلية لان مكملة المجموعة $\overline{\text{سـ}}$ هي المجموعة سـ كذلك الامر فاذا كانت المجموعة سـ مجموعة جزئية من ع فان $\overline{\text{ع}}$ تكون مجموعة جزئية من $\overline{\text{سـ}}$ ، أي :

$$\text{سـ} \subseteq \text{ع} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{ع}} \subseteq \overline{\text{سـ}}$$

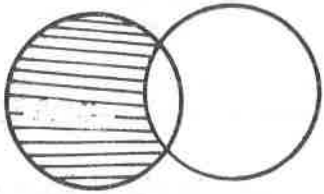
لان كل عناصر $\overline{\text{ع}}$ لا تنتمي الى ع ولا تنتمي الى سـ (لان $\text{سـ} \subseteq \text{ع}$) لذلك فهي تنتمي الى $\overline{\text{سـ}}$ ، وبالاعتماد على علاقة الاتمام المزدوج فيمكن استنتاج علاقة التكافؤ التالية :

$$\text{سـ} = \text{ع} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{سـ}} = \overline{\text{ع}}$$

٤ ـ حالات خاصة : فضل مجموعتين والفرق التناظري :

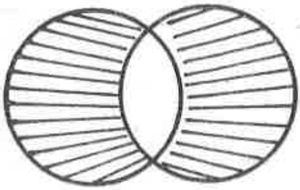
لتكن المجموعات سـ و ع مجموعتين جزيئتين من ك ، يمكن ان نعرف المجموعة المتممة لـ $\text{سـ} \cup \text{ع}$ بالنسبة الى المجموعات سـ او ع او $\text{سـ} \cup \text{ع}$.

فالمجموعة المكملة لـ $\text{س} \cap \text{ع}$ بالنسبة المجموعة س تسمى فضل س عن ع ونرمز لها بـ $\text{س} - \text{ع}$ ، وتتألف هذه المجموعة من العناصر المنتمية الى س وغير المنتمية الى ع



فضل س عن ع

أما مكملة المجموعة الجزئية $\text{س} \cap \text{ع}$ بالنسبة الى الاجتماع $\text{س} \cup \text{ع}$ فهي الفرق التناظري ونرمز له بـ $\text{س} \triangle \text{ع}$ ، ويتكون الفرق التناظري من العناصر المنتمية الى س وغير المنتمية الى ع ، والعناصر المنتمية الى ع وغير المنتمية الى س .



الفرق التناظري

ويمكن تعريف الفرق التناظري وفق العلاقات التالية :

$$\text{س} \triangle \text{ع} = (\text{س} \cup \text{ع}) - (\text{س} \cap \text{ع})$$

$$= (\text{س} - \text{ع}) \cup (\text{ع} - \text{س})$$

$$= (\text{س} \cap \overline{\text{ع}}) \cup (\text{ع} \cap \overline{\text{س}})$$

هذا ويتصف الفرق التناظري بالخواص التالية :

– الخاصة التبديلية : $\text{سـ} \triangle \text{ع} = \text{ع} \triangle \text{سـ}$

– الخاصة التجميعية :

$$(\text{سـ} \triangle \text{ع}) \triangle \text{صـ} = \text{سـ} \triangle (\text{ع} \triangle \text{صـ})$$

– وجود العنصر الحيادي ϕ : $\text{سـ} \triangle \phi = \text{سـ}$

– الخاصة التناظرية (كل مجموعة تناظر نفسها) $\text{سـ} \triangle \text{سـ} = \phi$

كما يمكن ذكر العلاقات التالية استنادا الى تعريف فضل مجموعتين :

$\text{سـ} - \text{ع} \neq \text{ع} - \text{سـ}$ (اذا كان $\text{سـ} \neq \text{ع}$)

$\text{سـ} - \text{سـ} = \phi$

$\text{سـ} - \phi = \text{سـ}$

$\phi - \text{سـ} = \phi$

$\text{سـ} - \text{ك} = \phi$

$\text{سـ} - \text{ع} \subseteq \text{سـ}$

$\text{سـ} - \text{ع} = \text{سـ} \cap \overline{\text{ع}}$

ثالثا ـ قانوني دومورغان :

يرتبط باسم الرياضي الكبير دومورغان القانونان التاليان :

القانون الاول : لتكن سـ و ع مجموعتين جزئيتين من مجموعة كلية ك ، ينص قانون دومورغان الاول على أن متممة هاتين المجموعتين تساوي الى تقاطع متمماتهما ، أي :

$$\overline{\text{سـ} \cup \text{ع}} = \overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}}$$

ويمكن البرهان على ذلك بواسطة الاحتواء المزدوج ، ان كل طرف من هذه العلاقة محتوى في الطرف الآخر ، ان كل عناصر $\overline{\text{سـ} \cup \text{ع}}$ لا تنتمي الى $\text{سـ} \cup \text{ع}$ ، اذن فهي لا تنتمي الى سـ ولا الى ع ، لذلك فان هذه العناصر تنتمي في الوقت ذاته الى $\overline{\text{سـ}}$ و $\overline{\text{ع}}$ حيث تنتج علاقة الاحتواء الاولى : $\overline{\text{سـ} \cup \text{ع}} \subseteq \overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}}$.

كذلك الامر فكل عنصر من $\overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}}$ لا ينتمي الى سـ ولا الى ع لذلك فهو لاينتمي الى اجتماعهما $\text{سـ} \cup \text{ع}$ ولكنه ينتمي الى متممة الاجتماع $\overline{\text{سـ} \cup \text{ع}}$ حيث علاقة الاحتواء الثانية :

$$\overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}} \subseteq \overline{\text{سـ} \cup \text{ع}} .$$

كما يمكن البرهان على هذا القانون بالشكل التالي :

$$\overline{\text{سـ} \cup \text{ع}} = \overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}}$$

$$\text{س} \in \overline{(\text{سـ} \cup \text{ع})} \Leftarrow \text{س} \notin (\text{سـ} \cup \text{ع})$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \notin \text{سـ} \ \text{و} \ \text{س} \notin \text{ع}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \in \overline{\text{سـ}} \ \text{و} \ \text{س} \in \overline{\text{ع}}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \in \overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \in \overline{(\text{سـ} \cup \text{ع})} \Leftrightarrow \text{س} \in (\overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}})$$

أي أن :

$$\overline{\text{سـ} \cup \text{ع}} = \overline{\text{سـ}} \cap \overline{\text{ع}}$$

القانون الثاني :

ان متممة تقاطع المجموعتين سـ و ع يساوي الى اجتماع المتممات ،

أي : $\overline{\text{سـ} \cap \text{ع}} = \overline{\text{سـ}} \cup \overline{\text{ع}}$

ويمكننا البرهان على هذه العلاقة اما بشكل مباشر أو باستنتاجها من القانون الاول ، لنفرض أن :

$\overline{\text{سـ}} = \text{سـ}'$ وان $\overline{\text{ع}} = \text{ع}'$ فحسب قانون دومورغان الاول

$\overline{\text{سـ}' \cup \text{ع}'} = \overline{\text{سـ}'} \cap \overline{\text{ع}'}$

ولكن $\overline{\text{سـ}'} = \text{سـ}$ و $\overline{\text{ع}'} = \text{ع}$ أي

$\overline{\text{سـ}' \cup \text{ع}'} = \text{سـ} \cap \text{ع}$

وبأخذ متممات الطرفين يكون :

$\text{سـ}' \cup \text{ع}' = \overline{\text{سـ} \cap \text{ع}}$

وهو المطلوب .

كما يمكن البرهان على هذا القانون كما يلي :

$\overline{\text{سـ} \cap \text{ع}} = \overline{\text{سـ}} \cup \overline{\text{ع}}$

س $\in \overline{(\text{سـ} \cap \text{ع})}$ $\Leftarrow$ س $\notin (\text{سـ} \cap \text{ع})$

$\Leftrightarrow$ س $\notin$ سـ او س $\notin$ ع

$\Leftrightarrow$ س $\in \overline{\text{سـ}}$ او س $\in \overline{\text{ع}}$

$\Leftrightarrow$ س $\in \overline{\text{سـ}} \cup \overline{\text{ع}}$

ومنه $\overline{\text{سـ} \cap \text{ع}} = \overline{\text{سـ}} \cup \overline{\text{ع}}$.

تطبيقات عمليـــة

١ ــ لتكن المجموعات : س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١ }

ع = { ٥ ، ٢ }

ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١ }

اوجد : (س $\cup$ ع) ، (ص $\cup$ ع) ، (س $\cup$ ص) ،

(س $\cup$ ع $\cup$ ص) ، (س $\cap$ ع) ، (س $\cap$ ص) ،

(ع $\cap$ ص) ، (س $\cap$ ع $\cap$ ص)

٢ ــ س ، ع ، ص ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة كلية ك ،

رتب المجموعات التالية بحيث تكون كل واحدة محتواة في المجموعة التي تليها :

ϕ ، س $\cap$ ع ، س $\cap$ ع $\cap$ ص ، س $\cup$ ع $\cup$ ص ،

ع ، ϕ ، س $\cap$ ع ، ك ، س $\cup$ ع

٣ ــ لتكن المجموعة : ك = { ١ ، ٢ ، ٣ }

أوجد مجموعة أجزاء المجموعة ثم ارسم شجرة الاجزاء .

٤ ــ برهن صحة العلاقات التالية :

(سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ ع') = سـ

(سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∪ ع') = سـ

(سـ) ∪ (سـ' ∩ ع) = سـ ∪ ع

سـ - ع = (سـ ∪ ع) - ع = سـ ∩ ع'

سـ ∪ ع - صـ = (سـ - صـ) ∪ (ع - صـ)

سـ - (ع - صـ) = (سـ - ع) ∪ (ع ∩ صـ)

[سـ' ∩ (سـ ∪ ع)] = سـ ∪ ع'

سـ ∩ (ع - صـ) = سـ ∩ ع - سـ ∩ صـ

(سـ - ع) - صـ = سـ - (ع ∪ صـ)

(سـ - ع) ∩ (صـ - ط) = (سـ ∩ صـ) - (ع ∪ ط)

(ع - سـ)' = (سـ ∩ ع) ∪ ع

سـ - (ع ∪ صـ) = (سـ - ع) ∪ (سـ - صـ)

سـ △ ع = (سـ ∩ ع') ∪ (ع ∩ صـ') .

الفصل الخامس

الاحتمالات

للاحتمالات أهمية خاصة في المجالات النظرية والتطبيقية كافة • فقد ازداد الاهتمام في فرنسا بدراسة الاحتمالات لمعرفة امكانيات الربح في ألعاب الحظ والقمار ، أما في انكلترا فقد ارتبطت دراسة الاحتمالات بالتطور الصناعي والاقتصادي لتطبيق مبادئه في أعمال التأمين ، لهذا السبب لجأت بعض الشركات الى عـدد من العلمـاء الرياضيين لدراسة امكانات تحقيق الربح وتوزيع الخسارة ، ثم درس حساب الاحتمالات دراسة علمية نظرية ذات قيمة عالية وأصبح من العلوم الاكثر تجريدا رغم كونه الاكثر تطبيقا في المجالات العملية • سندرس في هذا الفصل النقاط التالية :

أولا : مفاهيم عامة في حساب الاحتمالات •

ثانيا : تعريف الاحتمال •

ثالثا : خواص الاحتمالات في الحالة الابتدائية •

اولا ـ مفاهيم عامة في حساب الاحتمالات :

نستطيع توضيح بعض المفاهيم المستعملة في حساب الاحتمالات بالاعتماد على احدى التجارب التالية : القاء حجر النرد ، رمي قطعة نقدية ، قياس درجة الحرارة في مكان معين ، مراقبة تغير أسعار سلعة في مدينة دمشق ، قياس مقاومة سلك معدني • وبذلك تعرف التجربة بأنها مجموعة من الشروط المؤدية الى نتيجة ممكنة •

أما الحادث الابتدائي المرتبط بتجربة مفروضة فهو نتيجة من النتائج الممكنة لهذه التجربة فمثلا عند القاء حجر النرد ، يشكل وقوع حجر النرد على وجهه الذي يحمل الرقم (١) حادثا ابتدائيا قد يقع أو لا يقع • وكذلك الامر بالنسبة لبقية الوجوه التي تؤلف بقية الحوادث الابتدائية للتجربة • وتتصف بعض الحوادث بأن لها عددا منتهيا من الحوادث الابتدائية كالقاء حجر النرد ، ورمي قطعة النقود ، وسحب كرة من صندوق • وهناك تجاربا أخرى ذات حوادث ابتدائية غير منتهية العدد كقياس درجة الحرارة في مدينة دمشق التي تتراوح مثلا بين الصفر والاربعين ، أي أن هناك عددا كبيرا جدا من القيم التي يمكن أن تأخذها درجة الحرارة •

وبالطبع فعند القيام بتجربة معينة فاننا لا نهتم بجميع التفاصيل والظروف والنتائج المرتبطة بهذه التجربة ولكننا نركز اهتمامنا على جزء من التجربة أو على نتيجة من نتائجها •

وتقصد بالمجموعة الاساسية مجموعة الحوادث الابتدائيةالمرتبطة بحادث معين ، ونرمز لهذه المجموعة بـ (ك) ، فالمجموعة الاساسية المتعلقة باختبار القاء حجر النرد هي :

ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ونسمي حادثا مرتبطا بالتجربة كل مجموعة جزئية من ك ، فاذا عرفنا الحادث (ب) بأنه الحادث الذي يقع عندما نحصل على وجه يحمل رقما فرديا فان الحادث (ب) يعرف بالمجموعة الجزئية { ١ ، ٣ ، ٥ } من ك حيث ب ⊆ ك .

وعند القيام بتجربة معينة فاننا نحصل على حادث ابتدائي ، فاذا انتمى الحادث الابتدائي (د) الى (ب) فنقول بأن الحادث (ب) قد وقع ، واذا لم ينتم (د) الى (ب) فان الحادث (ب) لم يقع .

اذن د ∈ ب ⇐ الحادث ب قد وقع

د ∉ ب ⇐ الحادث ب لم يقع

فاذا حصلنا مثلا على الوجه رقم (٣) فان ٣ ∈ ب وبالتالي فان الحادث (ب) (الحصول على رقم فردي) يكون قد تحقق ، أما اذا وقع الوجه ٤ فان ٤ ∉ ب والحادث (ب) لم يتحقق .

وبما أن الحادث يعرف كمجموعة جزئية من المجموعة ك ، فاذا كان لدينا مجموعات جزئية متمايزة فاننا نحصل على حوادث متغايرة كالحوادث المعرفة بالمجموعات التالية : ب ∪ حـ ، ب ∩ حـ ، ب′ ، ب ـ حـ . يتحقق الحادث ب ∪ حـ عندما يقع أحد الحادثين ب أو حـ ، ويتحقق الحادث ب ∩ حـ عندما يقع الحادثين ب و حـ معا ، ويتحقق

الحادث ب َ عندما لا يقع الحادث ب ، ويتحقق الحادث ب ــ حـ عندما يقع الحادث ب ولا يقع الحادث حـ وهكذا .

ثانيا ــ تعريف الاحتمال :

تعرف الحالة الابتدائية بأنها تلك الحالة التي تكون فيها جميع الحوادث الابتدائية محتملة الوقوع على السواء ، وتصادف الحالة الابتدائية في تجربة سحب احدى ورق اللعب ، أو القاء حجر النرد ، أو رمي قطعة نقدية . وبصورة عامة لنفرض أن عدد الحوادث الابتدائية لتجربة مفروضة يساوي (ن) ، ولنفرض أن احتمال وقوع الحادث الابتدائي (ح) ، وبذلك يساوي الاحتمال الكلي الى جداء ح × ن ، ويمكن لهذا الجداء أن يكون مساويا $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{١}{٦}$ أو $\frac{١}{٤}$ ويؤخذ عادة العدد واحد لاسباب تاريخية ولسهولة الحساب ، وبذلك فان :

$$ح \times ن = ١$$

$$\text{أو} \quad ح = \frac{١}{ن}$$

ونتيجة لذلك ، فان احتمال وقوع حادث من الحوادث الابتدائية المرتبطة بتجربة مفروضة يساوي $\frac{١}{ن}$ حيث (ن) عدد الحوادث الابتدائية جميعا ، فاذا كان الحادث (ب) مؤلفا من (م) حادث ابتدائي فان احتمال وقوع الحادث (ب) يساوي :

$$ح(ب) = \frac{م}{ن}$$

ومنه فان احتمال وقوع حادث ما ، هو نسبة عدد الحوادث الابتدائية المؤلفة له الى عدد الحوادث الابتدائية كلها ، وبعبارة أخرى فان الاحتمال هو نسبة عدد الحالات المواتية الى عدد الحالات الممكنة .

$$\text{احتمال الحادث (ب)} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية للحادث(ب)}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ثالثا ــ خواص الاحتمالات في الحالة الابتدائية :

نستطيع تلخيص خواص الاحتمال في الحالة الابتدائية كما يلي :

١ ــ يسمى الحادث $\emptyset$ بالحادث المستحيل، ويساوي احتمال حدوثه الى الصفر ، ذلك لان عدد الحوادث المواتية للحادث المستحيل يساوي الصفر ، وبذلك فان :

$$ح(\emptyset) = \frac{\cdot}{ن} = \cdot$$

٢ ــ لنفرض أن ب و حـ حادثين غير متقاطعين بحيث يكون $ب \cap حـ = \emptyset$ ، فاذا كان عدد الحوادث المواتية للحادث (ب) يساوي الى (م) وعدد الحوادث المواتية للحادث (حـ) يساوي الى (ن) فان :

$$ح(ب \cup حـ) = \frac{م + ل}{ن} = \frac{م}{ن} + \frac{ل}{ن}$$

$$ح(ب \cup حـ) = ح(ب) + ح(حـ)$$

أي أن احتمال اجتماع حادثين غير متقاطعين يساوي الى مجموع احتماليهما •

٣ ـ لنفرض أن الحادث (ب) مجموعة جزئية من الحادث (حـ) أي ب ⊇ حـ ، فاذا وقع الحادث (ب) فان الحادث (حـ) سيقع لامحالة في حين أن العكس غير صحيح •

أما احتمال وقوع الحادث حـ لوحده (دون وقوع الحادث ب) فيساوي :

$$ح (حـ ــ ب) = \frac{ل ــ م}{ن}$$

وذلك بافتراض أن عدد الحالات المواتية لـ (ب) يساوي (م) وعدد الحوادث المواتية لـ (حـ) يساوي (ل) وعدد الحالات الممكنة يساوي (ن) • ومنه :

$$ح (حـ ــ ب) = \frac{ل}{ن} - \frac{م}{ن}$$

$$= ح (حـ) ــ ح (ب)$$

٤ ـ احتمال الحادث المكمل للحادث (ب) يساوي الى الواحد ناقصاً احتمال الحادث (ب) • أي :

$$ح (ب') = ١ ــ ح (ب)$$

اذا كان عدد الحالات المواتية للحادث (ب) يساوي الى (م)

وكان عدد الحالات الممكنة يساوي الى (ن) فان عدد الحالات المواتية للحادث (ب َ) يساوي (ن ـ م) أي :

$$ح(ب^{\prime}) = \frac{ن - م}{ن} = \frac{ن}{ن} - \frac{م}{ن}$$

$$= ١ - \frac{م}{ن}$$

$$= ١ - ح(ب)$$

٥ ـ يساوي احتمال وقوع الحادث الاكيد (ك) الى الواحد ، لان عدد الحالات المواتية للحادث الاكيد يساوي (ن) وعدد الحالات الممكنة يساوي أيضا (ن) أي :

$$ح(ك) = \frac{ن}{ن} = ١$$

وبتطبيق المبدأ الرابع نحصل أيضا على النتيجة نفسها حيث أن الحادث الاكيد هو متمم الحادث المستحيل ، فاذا كان :

$$ب = \phi \quad \text{فان} \quad ب^{\prime} = ك$$

$$ح(ك) = ١ - ح(\emptyset)$$

$$ح(ك) = ١ - ٠ \therefore = ١$$

لان احتمال الحادث المستحيل يساوي الصفر حسب القاعدة الاولى.

٦ ــ يقع احتمال أي حادث بين قيمتي احتمال الحادث الاكيــد والحادث المستحيل ، أي :

$$\therefore \leqslant \text{ح}(\text{ب}) \leqslant ١$$

وذلك لان عدد الحالات المواتية للحادث (ب) لا يمكن أن يقل عن الصفر ، ولا يمكن أن يزداد عن (ن) عدد الحالات الممكنة . وعلى هذا فان احتمال أي حادث عدد موجب دوماً محصــور بين الواحــد والصفر .

١ ــ ليكن الحادثان ب ، حـ حيث يساوي تقاطعهما $\text{ب} \cap \text{حـ}$ ، ان احتمال وقوع الحادثين ب أو حـ (اجتماع الحادثين) يساوي :

$$\text{ح}(\text{ب} \cup \text{حـ}) = \text{ح}(\text{ب}) + \text{ح}(\text{حـ}) - \text{ح}(\text{ب} \cap \text{حـ})$$

يمكن النظر الى اجتماع الحادثين المتقاطعين ب ، حـ على أنه اجتماع للحادثين غــير المتقاطعــين ب و $(\text{حـ} - \text{ب} \cap \text{حـ})$ ، اذن

$$\text{ب} \cup \text{حـ} = \text{ب} \cup (\text{حـ} - \text{ب} \cap \text{حـ})$$

فاذا كان عدد الحالات المواتية للحادث ب يساوي (م) وللحادث حـ يساوي (ل) وللحادث $\text{ب} \cap \text{حـ}$ يساوي (ق) ، وعدد الحالات الممكنة (ن) فان :

$$\text{ح}(\text{ب} \cup \text{حـ}) = \text{ح}(\text{ب}) + \text{ح}(\text{حـ} - \text{ب} \cap \text{حـ})$$

$$\text{ح}(\text{ب} \cup \text{حـ}) = \text{ح}(\text{ب}) + \text{ح}(\text{حـ}) - \text{ح}(\text{ب} \cap \text{حـ})$$

ونسمي هذا القانون بقانون الاحتمال الكلي .

كما نستطيع النظر الى الحادث (ب ∪ حـ) على أنه اجتماع لثلاثة حوادث غير متقاطعة هي على التوالي (ب ــ حـ) ، (حـ ــ ب)، (ب ∩ حـ) .

ان عدد الحالات المواتية للحادث ب ــ حـ يساوي م ــ ق

وعدد الحالات المواتية للحادث حـ ــ ب يساوي ل ــ ق

وعدد الحالات المواتية للحادث ب ∩ حـ يساوي ق

وهكذا فان احتمال الحادث (ب ∪ حـ) هو :

ح (ب ∪ حـ) = ح (ب ــ حـ) + ح (حـ ــ ب) + ح (ب ∩ حـ)

$$= \frac{\text{م} - \text{ق}}{\text{ن}} + \frac{\text{ل} - \text{ق}}{\text{ن}} + \frac{\text{ق}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{م} + \text{ل} - \text{ق}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} + \frac{\text{ل}}{\text{ن}} - \frac{\text{ق}}{\text{ن}}$$

= ح (ب) + ح (حـ) ــ ح (ب ∩ حـ)

تطبيقات عمليـــة

١ ـ لدينا مجموعة من الارقام الطبيعية :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ••• ٢٢ ، ٢٣

فاذا تم سحب رقم من هذه الارقام • فما هو احتمال الحصول على رقم من مضاعفات العدد ثلاثة أو مضاعفات العدد سبعة •

ح (ب) : احتمال الحصول على عدد من مضاعفات الثلاثة = $\frac{٧}{٢٣}$

ح (حـ) : احتمال الحصول على عدد من مضاعفات السبعة = $\frac{٣}{٢٣}$

ح (ب $\cap$ حـ) : احتمال الحصول على عدد من مضاعفات الثلاثـة والسبعة معا : $\frac{١}{٢٣}$

$$ح(ب \cup حـ) = ح(ب) + ح(حـ) - ح(ب \cap حـ)$$

$$= \frac{٧}{٢٣} + \frac{٣}{٢٣} - \frac{١}{٢٣} = \frac{٩}{٢٣}$$

٢ ـ ألقينا حجري نرد دفعة واحدة ، ما هو احتمال حصولنا على الوجه رقم ٥ أو الوجه رقم ٢ •

ح (ب) : احتمال الحصول على الوجه رقم (٥) = $\frac{١}{٦}$

ح (حـ) : احتمالُ الحصول على الوجه رقم (٢) $= \frac{١}{٦}$

ح (ب ⋂ حـ) • احتمالُ الحصولُ على الوجه رقم (٢) والوجه رقم (٥) $= \frac{١}{٣٦}$

ح (ب ⋃ حـ) = ح (ب) + ح (حـ) ــ ح (ب ⋂ حـ)

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} - \frac{١}{٣٦} = \frac{١١}{٣٦}$

٣ ــ لدينا مجموعة من ورق اللعب عددها ٥٢ • فاذا سحبنا ورقة من هذه الاوراق :

ــ ما هو احتمال سحب ورقة حمراء •

ــ ماهو احتمال سحب ورقة ديناري •

ــ ما هو احتمال سحب ورقة العشرة •

احتمال سحب ورقة حمراء ح (ب) $= \frac{٢٦}{٥٢} = \frac{١}{٢}$

احتمال سحب ورقة ديناري ح (حـ) $= \frac{١٣}{٥٢} = \frac{١}{٤}$

احتمال سحب ورقة العشرة ح (د) $= \frac{٤}{٥٢} = \frac{١}{١٣}$

الفصل السادس

المتوالية العددية والمتوالية الهندسية

تعرف المتتالية أو المتوالية بأنها مجموعة من الاعداد مرتبة حسب قانون معين يبين قيمة كل عدد من هذه المجموعة اذا علم الرقم الذي يحمله ضمن الترتيب المفروض . أما السلسلة فهي تركيب جبري يتألف من مجموع عدد لا متناه من الحدود التي تتعاقب حسب قانون معين اعتبارا من حد أولي وترتبط فيما بينها بعملية الجمع ، فالسلسلة اذن هي مجموع حدود متتالية لا نهائية .

تخرج دراسة المتتاليات والسلاسل بشكلها الموسع عن نطاق دراستنا ، ونقصر اهتمامنا على حالتين خاصتين هما المتوالية العددية والمتوالية الهندسية لعلاقتهما المباشرة بتطور بعض المتغيرات الاقتصادية والديمغرافية ولتطبيقهما في حسابات الفائدة البسيطة والمركبة .

أولا ـ المتوالية العددية :

بعد تعريف المتوالية العددية والتعرف على أنواعها سنقوم بايجاد مجموع حدودها وسنعرض هاتين النقطتين في الفقرتين التاليتين :

١ ـ تعريف المتوالية العددية وأنواعها •
٢ ـ مجموع حدود المتوالية العددية •

١ ـ تعريف المتوالية العددية وأنواعها :

نقول عن مجموعة من الاعداد أنها تؤلف فيما بينها متوالية عددية اذا كان كل حد من حدود المتوالية مساويا الى الحد الذي يسبقه مضافا اليه عدد ثابت يدعى أساس المتوالية •

فاذا كان أساس المتوالية موجبا كانت المتوالية متزايدة مثال :

٢ ٥ ٨ ١١ ١٤ ١٧ حيث الاساس يساوي ٣

واذا كان أساس المتوالية سالبا كانت المتوالية متناقصة ، مثال :

٢٣ ١٩ ١٥ ١١ ٧ ٣ حيث الاساس يساوي ـ ٤

وبشكل عام ، اذا رمزنا للحد الاول في المتوالية العددية بـ (ب) ولاساسها بـ (ر) ولعدد حدودها بـ (ن) فتأخذ المتوالية العددية الشكل العام التالي :

مرتبة الحد	١	٢	٣	٤ •••	ن
قيمة الحد	ب	ب + ر	ب+٢ر	ب+٣ر ••	ب+(ن ـ ١)ر
رمز الحد	ل$_{1}$	ل$_{2}$	ل$_{3}$	ل$_{4}$ •••	ل$_{ن}$

وبذلك يكون الحد العام للمتوالية العددية :

$$ل_ن = ب + (ن - ١) ر$$

فاذا كان ر > ٠ كانت المتوالية متزايدة ٠

واذا كانت ر < ٠ كانت المتوالية متناقصة ٠

ويمكن أيضا حساب أحد المقادير الموجودة في صيغة الحد العام اذا علمت المقادير الباقية ، أي :

الحد الاول : $ب = ل_ن - (ن - ١) ر$

عدد الحدود : $ن = \frac{ل_ن - ب + ر}{ر}$

أساس المتوالية : $ر = \frac{ل_ن - ب}{ن - ١}$

تعرف المتوالية العددية طريقة ثابتة في التزايد تسمى بطريقة التزايد الخطي ويعتبر حساب الفائدة البسيطة تطبيقا مباشرا للمتوالية العددية ٠ فاذا وظفنا رأس مال قدره ١٠٠ ل٠س بفائدة سنوية قدرها ١٠٪ فيمكن باضافة فوائد المبلغ الى المبلغ الحصول على المتوالية التالية :

قيمة المبلغ ١٠٠ ل٠س

وتصبح قيمة المبلغ في نهاية السنة الاولى ١٠٠ (١+١٠ر٠) = ١١٠ ل٠س

وتصبح قيمة المبلغ في نهاية السنة الثانية ١٠٠(١+٢×١٠ر٠)=١٢٠ل٠س

وتصبح قيمة المبلغ في نهاية السنة الثالثة ١٠٠(١+٣×١٠ر٠)=١٣٠ل٠س

وتصبح قيمة المبلغ في نهاية السنة ن ١٠٠(١+ن×١٠ر٠)=(١٠٠+١٠ن)ل٠س

وتشكل هذه المبالغ متوالية عددية حدها الاول ١٠٠ وأساسها (١٠)

٢ ـ مجموع حدود المتوالية العددية :

لايجاد مجموع حدود المتوالية العددية ، يمكن الاعتماد على خاصة أساسية مفادها أنه في المتوالية العددية يكون مجموع الحدين الواقعين على بعدين متساويين عن الحد الاول والاخير ثابتا ويساوي الى مجموع الحد الاول والاخير ، فاذا كانت لدينا المتتالية :

ترتيب الحد	١	٢	٣	...	ن ـ ١	ن
قيمة الحد	ب	ب+ر	ب+٢ر ...		ب+(ن ـ ٢)ر	ب+(ن ـ ١)ر

فان مجموع الحد الاول والاخير = $ل_{١}$ + $ل_{ن}$ = ب + ب + (ن ـ ١)ر =

٢ب + (ن ـ ١) ر

= $ل_{١}$ + $ل_{ن}$

مجموع الحدين (٢) و (ن ـ ١) = $ل_{٢}$ + $ل_{ن-١}$ = (ب + ر) + [ب + (ن ـ ٢) ر] = ٢ب + (ن ـ ١) ر = $ل_{١}$ + $ل_{ن}$

مجموع الحدين (٣) و (ن ـ ٢) = $ل_{٣} + ل_{ن ـ ٢}$ = (ب + ٢ر)

+ [ب + (ن ـ ٣) ر] = ٢ب + (ن ـ ١) ر = $ل_{١} + ل_{ن}$

وهكذا ..

وعندما يكون عدد حدود المتوالية فرديا فان مجموع الحد الاول والاخير يساوي الى ضعف الحد الاوسط . نستنتج اذن أن في المتوالية العددية ، كل حد هو وسط حسابي للحدين المجاورين (لأن كل ثلاثة حدود متتالية تشكل فيما بينها متوالية عددية) .

لنكتب حدود المتوالية بترتيبين مختلفين أحدهما متزايد والآخر متناقص ، فيكون مجموع الحدود :

مج = ب + (ب + ر) + (ب + ٢ ر) + .. + [ب + (ن ـ ٢) ر]
+ [ب + (ن ـ ١) ر]

مج = [ب + (ن ـ ١) ر] + [ب + (ن ـ ٢) ر] +
[ب + (ن ـ ٣) ر] ... + (ب + ر) + ب

٢ مج = ($ل_{١} + ل_{ن}$) + ($ل_{١} + ل_{ن}$) + ($ل_{١} + ل_{ن}$) + ..

+ ($ل_{١} + ل_{ن}$) + ($ل_{١} + ل_{ن}$)

٢ مج = ن ($ل_{١} + ل_{ن}$)

$$\text{مج} = \frac{\text{ن}}{2}\left(\text{ل}_{1} + \text{ل}_{\text{ن}}\right)$$

$$\text{مج} = \frac{\text{ن}}{2}\left[\text{ب} + \text{ب} + (\text{ن} - 1)\,\text{ر}\right]$$

$$\text{مج} = \frac{\text{ن}}{2}\left[2\,\text{ب} + (\text{ن} - 1)\,\text{ر}\right] \cdot$$

مثال :

ماهو مجموع متوالية عددية مؤلفة من ن عدد صحيح على الشكل التالي :

١ ٢ ٣ ٤ .. (ن ــ ١) ن

نطبق القانون :

$$\text{مج} = \frac{\text{ن}}{2}\left[2 + \left((\text{ن} - 1)\right)\right] = \frac{\text{ن}}{2}(\text{ن} + 1) = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$$

فاذا كانت ن = ٥٠ فان :

$$\text{مج} = \frac{50(51)}{2} = 1275$$

ثانيا : المتوالية الهندسية

سنتناول تعريف المتوالية الهندسية ثم سندرس قانون مجموع حدودها .

١ ــ تعريف المتوالية الهندسية :

نقول عن مجموعة من الاعداد انها تشكل فيما بينها متوالية هندسية ، اذا كان كل حد فيها يساوي للحد الذي يسبقه مضروبا بعدد ثابت يسمى أساس المتوالية :

فالمتوالية ٣ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ متزايدة أساسها (٢)

والمتوالية ٨ ٤ ٢ ١ $\frac{١}{٢}$ متناقصة أساسها ($\frac{١}{٢}$)

والمتوالية ٣ ــ٩ ٢٧ ــ٨١ ٢٤٣ متناوبة أساسها (ــ٣)

كما يمكن للمتوالية الهندسية أن تكون محدودة من الطرفين أو محدودة من طرف واحد . وبشكل عام ، فاذا رمزنا للحد الاول بـ (ب) ولأساسها بـ (ر) ولحدها العام بـ ($ل_{ن}$) فتكون العلاقة بين هذه المقادير على النحو التالي :

ترتيب الحد	١	٢	٣	٤	...	ن
قيمة الحد	ب	ب ر	ب $ر^{٢}$	ب $ر^{٣}$	...	ب $ر^{ن - ١}$

وبشكل عام فان $ل_{ن}$ = ب $ر^{ن - ١}$

فاذا كان ر > ١ كانت المتوالية متزايدة .

واذا كان ١ > ر > ∴ كانت المتوالية متناقصة .

واذا كان   ر < ∴ كانت المتوالية متناوبة .

هذا ويعتبر توظيف رؤوس الاموال وفق الفائدة المركبة كتطبيق مباشر على المتوالية الهندسية . فاذا تم توظيف مبلغ ١٠٠ ل٠س بفائدة سنوية قدرها ١٠٪ فان هذا المبلغ سيصبح :

في نهاية السنة الاولى : ١٠٠ + ١٠ر٠ × ١٠٠ = ١٠٠(١+١٠ر٠)

وفي نهاية السنة الثانية : ١٠٠ (١+١٠ر٠)(١+١٠ر٠)=١٠٠(١+١٠ر٠)^{٢}

وفي نهايةالسنةالثالثة: ١٠٠(١+١٠ر٠)^{٢}(١+١٠ر٠)= ١٠٠(١+١٠ر٠)^{٣}

وفي نهايةالسنة ن : ١٠٠ (١+١٠ر٠)$^{ن-١}$ (١+١٠ر٠)=١٠٠(١+١٠ر٠)^{ن}

٢ ــ مجموع حدود المتوالية الهندسية :

لتكن المتوالية الهندسية :

ب   ب ر   ب ر   ..   ب ر$^{ن-٣}$ ب ر$^{ن-٢}$ ب ر$^{ن-١}$

لنرمز لمجموع حدود هذه المتوالية بالرمز مج :

مج = ب + ب ر + ب ر^{٢} + ... + ب ر$^{ن-٣}$ + ب ر$^{ن-٢}$

+ ب ر$^{ن-١}$

لنضرب طرفي هذه المساواة بالاساس (ر) فيكون :

$$\text{ر مج} = \text{ب ر} + \text{ب ر}^{٢} + \text{ب ر}^{٣} + \cdots + \text{ب ر}^{\text{ن} - ٢} + \text{ب ر}^{\text{ن} - ١}$$

$$+ \text{ب ر}^{\text{ن}}$$

لنطرح العلاقة الثانية من الاولى طرفا من طرف :

$$\text{ر مج} - \text{مج} = \text{ب ر}^{\text{ن}} - \text{ب}$$

$$\text{مج}\,(\text{ر} - ١) = \text{ب}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)$$

$$\text{مج} = \text{ب}\,\frac{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}{\text{ر} - ١}$$

أما اذا كانت المتوالية متناقصة فان :

$$\text{ر مج} < \text{مج}$$

وبالتالي نطرح ر مج من مج فيكون الناتج :

$$\text{مج} - \text{ر مج} = \text{ب} - \text{ب ر}^{\text{ن}}$$

$$\text{مج}\,(١ - \text{ر}) = \text{ب}\,(١ - \text{ر}^{\text{ن}})$$

$$\text{مج} = \text{ب}\,\frac{١ - \text{ر}^{\text{ن}}}{١ - \text{ر}}$$

وفي المتوالية الهندسية اللانهائية المتناقصة ، يكون :

$$١ > ر$$

$$و\ ن \longleftarrow \infty$$

$$\text{وبذلك فان } ر^{ن} \longleftarrow ٠$$

ويكون مجموع حدود المتوالية الهندسية المتناقصة :

$$مج = ب \frac{١ - ٠}{١ - ر} = \frac{ب}{١ - ر}$$

تطبيقات عمليــة

١ ــ ما هو مجموع ن حدا فرديا في المتواليــة :

$$١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad \cdots \quad \text{ن}$$

$$\text{مج} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{ب} + (\text{ن} - ١)\text{ر}\right]$$

$$\text{مج} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢ + (\text{ن} - ١)\,٢\right] = \frac{\text{ن}}{٢}\left(٢ + ٢\text{ن} - ٢\right) = \text{ن}^{٢}$$

وهكذا فان مجموع الحدود الفردية العشرة الاولى هو:

$$\text{مج} = (١٠)^{٢} = ١٠٠$$

٢ ــ ما هي مضاريب العدد ٧ الواقعة بين الحدين ١٠٠ و ١٠٠٠

الحد الاول الذي يقبل القسمة على ٧ بعد العدد ١٠٠ هو ١٠٥

الحد الاخير الذي يقبل القسمة على ٧ قبل العدد ١٠٠٠ هو ٩٩٤

وعدد الحدود الواقعة بين هذين العددين يساوي :

$$\frac{٩٩٤ - ١٠٥}{٧} + ١ = ١٢٨ \text{ حدا}$$

وبالتالي يكون مجموع هذه الاعداد مج = $\frac{١٢٨}{٢}(١٠٥+٩٩٤)$

$= ٧٠٣٣٦$

٣ ـ أوجد مجموع حدود المتوالية :

$$١ \quad \frac{١}{٤} \quad \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} \quad \left(\frac{١}{٤}\right)^{٣} \cdots \quad \left(\frac{١}{٤}\right)^{ن}$$

نطبق القانون :

$$مج = \frac{ب}{١-ر} = \frac{١}{١-\frac{١}{٤}} = \frac{١}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٤}$$

٤ ـ ماهو مجموع حدود المتوالية :

$$٢ \quad ٦ \quad ١٨ \quad ٥٤ \quad ١٦٢ \quad ٤٨٦$$

$$مج = ب \, \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$$

$$= ٢ \quad \frac{(٣)^{٦} - ١}{٣ - ١} = \frac{١٤٥٨ - ٢}{٣ - ١} = ٧٢٨$$

الفصل السابع

المعادلات والمتراجحات

ترتبط المتغيرات الرياضية فيما بينها بعلاقات عديدة تعد المعادلات والمتراجحات من أهم أنواعها • سنقوم في اطار هذا الفصل بدراسة المعادلات والمتراجحات لاستخدامها لاحقا بدراسة التوابع وتمثيلها البياني • سنتعرض في بحث المعادلات لحل المعادلة من الدرجة الاولى (بمجهول واحد أو بمجهولين) ولحل المعادلة من الدرجة الثانية ، وسنختتم هذا البحث بتوضيح العلاقة بين أمثال حدود المعادلة من الدرجة الثانية وجذريها ، أما دراستنا للمتراجحات فستتناول تعريف المتراجحات وأنواعها ، وبذلك يتضمن هذا الفصل البحثين التاليين :

البحث الاول : المعادلات

البحث الثاني : المتراجحات

البحث الاول

المعادلات

تعرف المعادلة بأنها مساواة بين تركيبين جبريين يتضمن أحدهما مجهولا أو عدة مجاهيل يرمز لهـا غالبا بالاحـرف س ، ع ، ص فالعلاقـات :

$$س^{٢} = - س + ٦$$

$$٥س - ٨ = ٢س + ٧$$

$$٣س + ٥ع = ٣٦$$

تشكل معادلات لان كلا منها مساواة بين تركيبين جبريين ، ولكن التساوي بين التركيبين الجبريين في المعادلة لا يتم الا اذا أخذ المجهول قيمة خاصة تقلب المعادلة الى مساواة عددية •

تقلب المعادلة الاولى الى مساواة من أجل س = ٢ و س = -٣

وتقلب المعادلة الثانية الى مساواة من أجل س = ٥

وتقلب المعادلة الثالثة الى مساواة من أجل س = ٢ و ع = ٦

وتسمى هذه القيم التي تقلب المعادلة الى مساواة بحلول أو بجذور المعادلة •

تأخذ المعادلات أشكالا عديدة ، فمنها المعادلة من الدرجة الاولى التي تمثل بيانيا بخط مستقيم ، ومنها المعادلة من الدرجة الثانية والثالثة التي تمثل بمنحنيات تختلف عن بعضها بعضا بعدد وباتجاه نهاياتها الحدية ، وتكون المعادلة من درجة أعلى أس في متغيراتها .

تكون المعادلة بمجهول واحد أو بمجهولين أو بأكثر وذلك حسب عدد المجاهيل الذي تتضمنه هذه المعادلة .

يقصد بحل المعادلة ايجاد جذورها أو حلولها ، وللوصول الى هذه النتيجة تستبدل المعادلة بمعادلات مكافئة أبسط منها حتى يتم التوصل الى معادلة بسيطة الحل ، ويعتمد في الاستبدال على نظريتين أساسيتين في التكافؤ .

تنص النظرية الاولى على أن اضافة (أو طرح) تركيب جبري واحد الى طرفي المعادلة ، معين من أجل جذورها ، يؤدي الى معادلة مكافئة للاولى .

لتكن المعادلة س^{٢} = ٥س − ٦

وليكن التركيب الجبري المضاف الى طرفيها هو ٧ س − ٤

فنحصل على المعادلة :

س^{٢} + ٧س − ٤ = ٥ س − ٦ + ٧س − ٤

س^{٢} + ٧س − ٤ = ١٢س − ١٠

وكما أن س = ٢ جذر للمعادلة الاولى فهو أيضا جذر للمعادلة الثانية لانه يحولها الى مساواة بتبديل س بقيمتها العددية ، وبالتالي فالمعادلتان متكافئتان . واستنادا الى هذه النظرية نستطيع اختصار

الجدود المتشابهة في طرفي المعادلة كما تتمكن من نقل أحد حدود طرفيها الى الطرف الآخر بعد تبديل اشارته الجبرية .

وتنص النظرية الثانية على أن ضرب (أو تقسيم) طرفي المعادلة في تركيب جبري واحد معين وغير مساو للصفر أو غير قابل لان يصبح صفرا من أجل القيم العددية التي تعطى للمجاهيل يؤدي للحصول على معادلة مكافئة للمعادلة الاولى .

لتكن المعادلة $س^٢ = ٥س - ٦$، وليكن التركيب الجبري المضروب في طرفي المعادلة $٢س^٢ + ٣$ ، وهو تركيب معين ومختلف عن الصفر لكل القيم التي تعطى للمجهول س ، وبضرب طرفي المعادلة في هـذا التركيب الجبري نحصل على المعادلة :

$$س^٢ (٢س^٢ + ٣) = (٥ س - ٦) (٢ س^٢ + ٣)$$

وتكافىء هذه المعادلة المعادلة الاصلية ، فمن أجل س = ٢ تنقلب المعادلة الجديدة الى مساواة عددية كما هو الحال بالنسبة للمعادلة الاصلية لان س = ٢ يشكل أحد جذور المعادلة الاولى ، فالمعادلتان اذن متكافئتان ، واعتمادا على هذه النظرية نستطيع تقسيم طرفي المعادلة على عدد واحد وكذلك حذف المخارج بضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الاصغر .

اولا ـ حل المعادلة من الدرجة الاولى بمجهول واحد :

تأخذ المعادلة من الدرجة الاولى الشكل العام ب س + حـ = ٠ حيث ب ، حـ ثوابت ، ب لا يساوي الصفر ، س متغير مجهول ، وتحل هذه المعادلة بنقل الثابت حـ الى الطرف الثاني ، فيكون :

ب س = ـ حـ

ثم نقسم طرفي المعادلة على ب ، فيكون $س = -\frac{حـ}{ب}$ هو حل المعادلـة :

مثال عددي : لتكن المعادلة ٢ س + ٦ = ٠

$$٢س = -٦$$

$$س = -\frac{٦}{٢} = -٣$$

وتمثل القيمة (ـ ٣) حلا للمعادلة من الدرجة الاولى :

أما اذا كانت ب مساوية للصفر ، فتصبح المعادلة من الشكل :

$$\therefore ٠ . س = - حـ$$

وهنا نميز بين حالتين :

ـ اذا كانت حـ مختلفة عن الصفر ، فالمعادلة مستحيلة الحل .

ـ واذا كانت حـ مساوية للصفر ، فيكون جذر المعادلة غير معين ويقال بأن المعادلة تمثل عدم تعيين .

ثانيا ـ حل المعادلة من الدرجة الاولى بمجهولين :

تكون المعادلة من الدرجة الاولى بمجهولين من الشكل التالي :

$$ب س + حـ ع = م$$

$$د س + هـ ع = ل$$

حيث س ، ع متغيران ، ب ، حـ ، د ، هـ ، م ، ل ثوابت ، فاذا كان ب هـ ـــ حـ د ≠ ٠ فيكون لجملة المعادلتين الآتيتين حل وحيد نحصل عليه بحساب أحد المجاهيل بدلالة الآخر من احدى المعادلتين وتعويض قيمته في المعادلة الثانية ثم نحل المعادلة الناتجة من الدرجة الاولى حسبما سبق توضيحه في الفقرة السابقة •

أما اذا كان ب هـ ـــ حـ د = ٠ فعند ذلك نفرق بين حالتين :

اذا كان $\frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} = \frac{\text{م}}{\text{ل}}$ فيكون هناك عدم تعيين

أما اذا كان $\frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} \neq \frac{\text{م}}{\text{ل}}$ فتكون المعادلتان مستحيلتي الحـــل •

وسنعود لمناقشة هذه الحالات عند دراسة المصفوفة من المرتبـــة الثانية •

مثال :

٢ س + ٤ ع = ١٤

٣ س ـــ ٢ ع = ٥

من المعادلة الاولى : ٢ س = ١٤ ـــ ٤ ع

س = ٧ ـــ ٢ ع

نعوض في المعادلة الثانية : ٣ (٧ ــ ٢ ع) ــ ٢ ع = ٥

٢١ ــ ٦ ع ــ ٢ ع = ٥

ــ ٨ ع = ــ ٢١ + ٥ = ــ ١٦

$$\text{ع} = \frac{-١٦}{-٨} = ٢$$

نعوض في المعادلة الاولى :

٢ س + ٤ × ٢ = ١٤

٢ س = ١٤ ــ ٨ = ٦

$$\text{س} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

اذن س = ٣ ، ع = ٢ هو الحل الآني لجملة المعادلتين من الدرجة الاولى بمجهولين ٠

مثال آخر :

٢ س + ٣ ع = ١٣

٤ س + ٦ ع = ٢٦

نلاحظ هنا أن المعادلة الثانية تنتج عن المعادلة الاولى بضرب طرفيها بـ (٢) ونلاحظ كذلك أن ٢ × ٦ ــ ٣ × ٤ = ٠ ، وحيث أن

$$\frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} = \frac{١٣}{٢٦}$$

فنقول ان لجملة هاتين المعادلتين عددا لا نهائيا له من الحلول ، وذلك لان هاتين المعادلتين تشكلان في الواقع علاقة واحدة ، ولا بد لكي يكون هناك حلا وحيدا لمعادلتين من وجود معادلتين مستقلتين عن بعضهما البعض ، لذلك نسمى هذه الحالة بحالة عدم التعيين ، فأيـة قيمة تحقق العلاقة :

$$٢\ س = ١٣ - ٣\ ع$$

$$\text{أو}\quad س = \frac{١٣ - ٣\ ع}{٢}$$

تمثل حلا لجملـة المعادلتين .

أما اذا كان :

$$٢\ س + ٣\ ع = ١٣$$

$$٤\ س + ٦\ ع = ٣٩$$

فان هاتين المعادلتين مستحيلتي الحل وذلك لان :

$$\frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} \neq \frac{١٣}{٣٩}$$

فهناك تناسب في معاملات الطرف الاول لكل من المعادلتين ، ولكن هذا التناسب غير متوفر في الطرف الثاني ، مما يوضح أن احدى المعادلتين تخالف في تركيبها الرياضي المعلومات الواردة في العلاقـة الاخرى ، ومن هنا تنتج استحالة ايجاد حل مشترك للعلاقتين بآن واحـد .

ثالثا ـ حل المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

تأخذ المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد الشكل العام التالي :

$$ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$$

حيث ب ، حـ ، د ثوابت ، ب $\neq$ ٠ ، س متغير .

نحل هذه المعادلة عن طريق المميز الذي يستند نظريا الى اتمام المعادلة الى مربع كامل . فنقسم طرفي المعادلة على العدد ب فنجد أن:

$$س^{٢} + \frac{حـ}{ب} س + \frac{د}{ب} = ٠$$

ثم ننقل الحد $\frac{د}{ب}$ الى الطرف الثاني من المعادلة فيكون :

$$س^{٢} + \frac{حـ}{ب} س = - \frac{د}{ب}$$

نلاحظ أن الطرف الاول من المعادلة يتضمن الحدين الاولين لمربع التركيب الجبري $(س + \frac{حـ}{٢ب})^{٢}$ ، ولاتمام الحدين $س^{٢} + \frac{حـ}{ب} س$ الى مربع كامل مع المحافظة على صحة المعادلة ، يكفي أن نضيف الى طرفيها مربع نصف أمثال س أي $\frac{حـ^{٢}}{٤ ب^{٢}}$ فيكون لدينا :

$$س^2 + \frac{ح}{ب}س + \frac{ح^2}{4ب^2} = \frac{ح^2}{4ب^2} - \frac{د}{ب}$$

أو $$\left(س + \frac{ح}{2ب}\right)^2 = \frac{ح^2}{4ب^2} - \frac{د}{ب}$$

$$\left(س + \frac{ح}{2ب}\right)^2 = \frac{ح^2 - 4ب د}{4ب^2}$$

وقبل استخراج الجذر التربيعي لطرفي المعادلة الاخيرة يتوجب معرفة اشارة الطرف الثاني ، وبما أن المخرج ($4ب^2$) موجب دوما ، فان اشارة الطرف الثاني من اشارة التركيب الجبري $ح^2 - 4ب د$ الذي يسمى بمميز المعادلة ويرمز له بـ $\triangle$ ، ويمكن أن نفرق هنا بين ثلاث حالات :

الحالة الاولى : يكون فيها المميز موجبا $ح^2 - 4ب د > 0$ ، في هذه الحالة نستطيع ايجاد جذر الطرف الثاني من المعادلة على النحو التالي :

$$\left(س + \frac{ح}{2ب}\right)^2 = \frac{ح^2 - 4ب د}{4ب^2}$$

وبجذر الطرفين يكون : $س + \frac{ح}{2ب} = \mp \frac{\sqrt{ح^2 - 4ب د}}{2ب}$

ومنه فان $س = \frac{-ح}{2ب} \pm \frac{\sqrt{ح^2 - 4ب د}}{2ب}$

وبالاصلاح يكون جذرا المعادلة هما :

$$س_1 = \frac{-ح + \sqrt{ح^2 - 4ب د}}{2ب}$$

$$س_2 = \frac{-ح - \sqrt{ح^2 - 4ب د}}{2ب}$$

الحالة الثانية : يكون المميز فيها مساويا للصفر ، أي $ح^2 - 4 ب د = 0$ ∴ في هذه الحالة تأخذ المعادلة المحولة الى مربع كامل الشكل :

$$\left(س + \frac{ح}{2ب}\right)^2 = 0$$

وبالتالي فان $س + \frac{ح}{2ب} = 0$

$$\text{و} س = -\frac{ح}{2ب}$$

ويكون للمعادلة هنا جذرا واحدا يقال لـه جذر مضاعف •

الحالة الثالثة : يكون المميز فيها سالبا ، أي $ح^٢ - ٤ ب د < ٠$ ،
في هذه الحالة لايمكن ايجاد الجذر التربيعي للطرف الثاني من المعادلة :

$$\left(س + \frac{ح}{٢ب}\right)^٢ = \frac{ح^٢ - ٤ب د}{٤ ب^٢}$$

وبالتالي فليس لهذه المعادلة جذور ، ويقال ان لها جذورا تخيلية أو غير حقيقية •

أمثلـة تطبيقية :

الحالـة الاولى : المميز موجب •

$$س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$$

المميز $\Delta = ح^٢ - ٤ ب د = ٢٥ - ٤ \times ١ \times ٦ = ٢٥ - ٢٤ = ١$

جذر المميز $\Delta = \sqrt{\Delta} = \mp ١$

$$س = \frac{-ح \mp \sqrt{\Delta}}{٢ ب} = \frac{+٥ \mp ١}{٢}$$

والجذران هما $س_١ = \frac{٥ + ١}{٢} = ٣$

$$س_٢ = \frac{٥ - ١}{٢} = ٢$$

الحالة الثانية : المميز يساوي الصفر •

$$س^٢ - ٤ س + ٤ = ٠$$

$$\Delta = حـ^٢ - ٤ ب د$$

$$= ١٦ - ٤ \times ١ \times ٤ = ١٦ - ١٦ = ٠$$

اذن :

$$س = \frac{٤ \mp ٠}{٢} = ٢$$

وهو جذر مضاعف •

الحالة الثالثة : المميز سالب •

$$س^٢ + ٤ س + ٥ = ٠$$

$$\Delta = حـ^٢ - ٤ ب د$$

$$= ١٦ - ٤ \times ١ \times ٥ = ١٦ - ٢٠ = - ٤$$

المميز سالب : وليس للمعادلة جذور حقيقية •

رابعا : العلاقة بين امثال حدود المعادلة من الدرجة الثانية وجذريها :

رأينا أن جذري المعادلة من الدرجة الثانية ب $س^٢ + حـ س + د = ٠$

التي تكتب أيضا على الشكل : $س^{٢} + \frac{ح}{ب} س + \frac{د}{ب} = ٠$

هما على التوالي : $س_{١} = \frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$

$$س_{٢} = \frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

ونلاحظ أن مجموع هذين الجذرين الذي نرمز اليه بـ مج هو :

$$مج = س_{١} + س_{٢} = \frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} + \frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

$$مج = \frac{-٢ ح}{٢ ب} = -\frac{ح}{ب}$$

أو $- مج = \frac{ح}{ب}$

$$ج = س_{١} \cdot س_{٢} = \left(\frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \cdot \frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \right)$$

$$= \frac{١}{٤ ب^{٢}} \left(ح^{٢} - ح^{٢} + ٤ ب د \right)$$

$$= \frac{1}{\text{٤ب}^{٢}} \left(\text{٤ب د}\right)$$

$$= \frac{\text{٤ب د}}{\text{٤ب}^{٢}} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

وهكذا نستطيع كتابة المعادلة من الدرجة الثانية بدلالة مجموع وجداء جذريها على النحو التالي :

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ح}}{\text{ب}}\,\text{س} + \frac{\text{د}}{\text{ب}} = ٠$$

$$\text{س}^{٢} + \text{مج س} + \text{ج} = ٠$$

وبالتالي فمن الممكن استخدام هذه العلاقة لايجاد جذور المعادلة من الدرجة الثانية بصورة مباشرة .

مثال : لتكن المعادلــة :

$$\text{س}^{٢} + ٩\,\text{س} + ٢٠ = ٠$$

ان مجموع جذري هذه المعادلة يساوي − ٩ ، أي $\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} = -٩$

وجداء جذري هذه المعادلة يساوي ٢٠ ، أي $\text{س}_{١} \times \text{س}_{٢} = ٢٠$

ومن الواضح أن العددين اللذين مجموعهما − ٩ وجداؤهما ٢٠ همـا :

$$\text{س}_{١} = -٤$$

$$\text{س}_{٢} = -٥$$

وهذان العددان هما جذرا المعادلة السابقة .

البحث الثاني

المتراجحات

نستطيع التفريق بين نوعين من المتراجحات ، المتراجحات البسيطة والمتراجحات المركبة .

اولا : المتراجحات البسيطة :

لنأخذ عددا حقيقيا ما وليكن ب (حيث ب ∈ ح) ، يرتبط هذا العدد مع بقية الاعداد الحقيقية التي تزيد عنه بعلاقة من الشكل :

ب < س

ونقرأ ب أصغر من س أو س أكبر من ب .

كما يرتبط ب مع بقية الاعداد الحقيقية التي تقل عنه بعلاقة من الشكل :

ب > س

ونقرأ ب أكبر من س أو س أصغر من ب .

تمثل كل من العلاقتين ب < س و ب > س متراجحة نسميها بالمتراجحة البسيطة .

ويمكن اجراء بعض العمليات على المتراجحات البسيطة نلخصها على النحو التالي :

١ ـ اذا أضفنا (أو طرحنا) الى طرفي المتراجحة عدداً ثابتا وليكن حـ ، فان المتراجحة تبقى صحيحة ، وهذا ما يبرر نقل مقدار ما من أحد طرفي المتراجحة الى الطرف الآخر وذلك بتغيير اشارته الجبرية •

مثال : لتكن المتراجحة ٥ < ١٠

باضافة حـ = ٣ الى طرفي المتراجحة يكون : ٥ + ٣ < ١٠ + ٣
أو ٨ < ١٣

وبنقل العدد (٣) من الطرف الثاني الى الطرف الاول بعد تغيير اشارته الجبرية يكون :

٥ + ٣ ـ ٣ < ١٠

أو ٥ < ١٠

وبذلك نعود الى المتراجحة البسيطة الاولى •

٢ ـ اذا ضربنا (أو قسمنا) طرفي المتراجحة بالعدد الموجب (د) فتبقى المتراجحة صحيحة وهذه الخاصة تبرر قسمة أو ضرب طرفي المتراجحة بعدد موجب •

فالمتراجحة ب < س

تصبح د • ب < د • س

أو $\frac{\text{ب}}{\text{د}} < \frac{\text{س}}{\text{د}}$

مثال : ٦ < ١٢

نضرب بالعدد (٣)   ١٨ < ٣٦

نقسم على العدد (٢)   ٣ < ٦

٣ ــ اذا ضربنا أو قسمنا طرفي المتراجحة بالعدد السالب هـ فيجب تغيير اتجاه المتراجحة لكي تبقى العلاقة صحيحة ، فاذا كانت لدينا المتراجحة ب < س

فيكون :   هـ • ب > هـ • س

أو $\frac{\text{ب}}{\text{هـ}} > \frac{\text{س}}{\text{هـ}}$

مثال   ٢٠ < ٤٠

اذا ضربنا بـ (ــ ٢) يكون   ــ ٤٠ > ــ ٨٠

وبالقسمة على (ــ ٢) يكون ــ ١٠ > ــ ٢٠

وهكذا فاذا أردنا ضرب طرفي المتراجحة أو قسمتها على عدد سالب فمن اللازم التقيد بتغيير اتجاه المتراجحة لكي تبقى العلاقة صحيحة .

ثانيا ــ المتراجحة المركبة :

لتكن لدينا المتراجحتان البسيطتان :

ب < س

س < حـ

يمكن أن نشكل من هاتين المتراجحتين البسيطتين متراجحة واحدة مركبة تكتب على الشكل :

ب < س < جـ

فاذا كان ب = ٥ و جـ = ٥٠ فتأخذ المتراجحة السابقة الشكل العددي :

٥ < س < ٥٠

وبذلك يمكن للعدد س أن يأخذ جميع القيم الواقعة بين الـ ٥ والـ ٥٠ ، هذا ويمكن أن نجري على المتراجحات المركبة ذات العمليات التي أجريناها على المتراجحات البسيطة ، ونبين هذه العمليات على النحو التالي :

١ ــ اذا أضفنا (أو طرحنا) الى أطراف المتراجحة ب < س < حـ العدد الموجب د فان المتراجحة المركبة تبقى صحيحة ، وهذا ما يفسر امكانية نقل مقدار ما من طرف المتراجحة الى طرفها الآخر بعد تغيير اشارته الجبرية ، أي أن المتراجحة تصبح :

د + ب < د + س < د + حـ

مثال ١٠ < س < ١٠٠

وباضافة (٢٥) الى أطراف المتراجحة يكون :

١٠ + ٢٥ < س + ٢٥ < ١٠٠ + ٢٥

٣٥ < س + ٢٥ < ١٢٥

٢ ــ اذا ضربنا أو قسمنا جميع أطراف المتراجحة ب < س < حـ بالعدد الموجب (د) فان المتراجحة تبقى صحيحة ، أي :

د • ب < د • س < د • حـ

$$\frac{\text{ب}}{\text{د}} < \frac{\text{س}}{\text{د}} < \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$$

وهذا ما يبرر امكانية اختصار حدود المتراجحة وذلك بقسمتها على عدد ثابت موجب • مثال :

لتكن المتراجحة ٢٥ < ٥٠ < ١٢٥

بقسمة حدود المتراجحة على ٥ يكون ٥ < ١٠ < ٢٥

وبضرب حدود المتراجحة بالعدد ٢ يكون ٥٠ < ١٠٠ < ٢٥٠

٣ ــ اذا ضربنا (أو قسمنا) جميع أطراف المتراجحة ب<س<حـ بالعدد السالب هـ فان المتراجحة تبقى صحيحة بعد تغيير اتجاهها ، أي:

هـ • ب > هـ • س > هـ • حـ

مثال عددي ١٥ < ٢٠ < ٥٠

بضرب حدود المتراجحة بالعدد (ــ ٢) يكون :

ــ ٣٠ > ــ ٤٠ > ــ ١٠٠

وبقسمة حدود المتراجحة على العدد (ــ ٥) يكون :

ــ ٣ > ــ ٤ > ــ ١٠

وهكذا فاذا ضربنا (أو قسمنا) متراجحة بعدد سالب ، فمن اللازم تغيير اتجاه المتراجحة لكي تبقى صحيحة •

ملاحظة : يمكن للمتراجحات البسيطة أو المركبة أن تأخذ الشكل التالي :

ب ⩽ س

س ⩽ حـ

ب ⩽ س ⩽ حـ

وفي هذه الحالة تضاف علاقة المساواة الى علاقة التراجح ، وتبقى العمليات والخواص التي ذكرناها سابقا مطبقة بصورة صحيحة على هذا النوع من العلاقات •

* * *

تطبيقات عمليـــة

أوجــد حلول المعادلات التاليــة :

٢س + ٣ = ∴

٦ س — ٤ = ∴

— ٣ س + ٩ = ∴

$\frac{١}{٢}$ س + ٣ = ∴

— س^{٢} + س + ١ = ∴

س^{٢} — ٤ س — ٥ = ∴

س^{٢} — ٣ س + ٢ = ∴

— س^{٢} + ٣ س = ∴

س^{٣} — ٣ س^{٢} + ٢ = ∴

— س^{٢} — س + ٢ = ∴

— س^{٣} + ٣ س = ∴

— س^{٢} + ٤ = ∴

س^{٣} — ٣ س — ٤ = ∴

الفصل الثامن

مفاهيم أساسية في التوابع

تعد دراسة التوابع من أهم الموضوعات الرياضية ذات التطبيق الواسع في الابحاث الاقتصادية ، فهناك توابع المنفعة والكلفة والعرض والطلب والانتاج والاستثمار والاستهلاك وغيرها من التوابع الاقتصادية. لهذا لابد من الدراسة الرياضية للتوابع لاستخدامها وتطبيقها في فروع الاقتصاد المتعددة .

سنخصص هذا الفصل للتذكير ببعض المفاهيم الاساسية في دراسة التوابع ، فبعد تعريف التوابع وذكر بعض أنواعها ، سنعرف المجال والجوار والنهايات والاستمرار ثم سندرس اتجاه التغيرات النسبية للتابع والمتحول ، كما سنتعرض للنهايات الحدية للتوابع ولمفهوم التقعر والانعطاف . وهكذا سنناقش النقاط السابقة موزعة على الابحاث التالية :

البحث الاول : التوابع وأنواعها .

البحث الثاني : المجال والجوار .

البحث الثالث : النهايات .

البحث الرابع : الاستمرار •

البحث الخامس : اتجاه التغيرات النسبية للتابع والمتحول •

البحث السادس : التقعر •

البحث السابع : النهايات الحديـة •

البحث الثامن : الانعطاف •

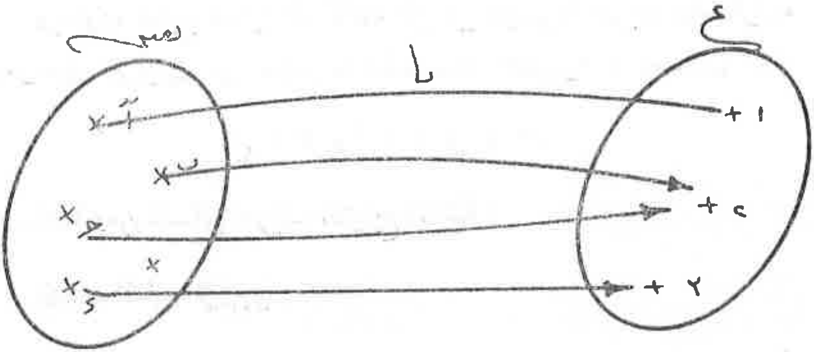
البحث التاسع : المستقيمات المقاربة •

البحث الاول

التوابع وأنواعهـا

لتكـن المجموعـة سـ = { آ ، ب ، حـ ، د } والمجموعة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، يمكن ربط عناصر المجموعة سـ بعناصر المجموعة ع وفق قاعدة نصطلح على تسميتها بالعلاقة •

نقول عن علاقة من سـ الـى ع أنها تابع معرف على سـ ويأخذ قيمه في ع أو أنه تطبيق لـ سـ في ع اذا كـان لكـل عنصر من عناصر سـ مقابل ومقابل واحد فقط من ع •



فاذا رمزنا بـ (تا) للتابع فاننا نكتب سـ $\xrightarrow{تا}$ ع ، ونقرأ هذا هذا الرمز (تا) تابع معرف على سـ ويأخذ قيمه في ع •

نسمي المجموعة سـ بمجموعة التعريف أو الانطلاق ، والمجموعة

ع بمجموعة الاستقرار أو الوصول • ونرمز لمقابل العنصر س في مجموعة التعريف بالرمز تا (س) الذي نسميه قيمة التابع الموافقة للعنصر س أو صورة س وفق التابع ع = تا (س) •

يتم التقابل بين عناصر المجموعتين سـ و ع بتحديد عناصر المجموعة سـ ، والعناصر التي تقابلها في المجموعة ع ، كأن نقول :

تا (آ) = ١   تا (حـ) = ٢

تا (ب) = ٢   تا (د) = ٣

أو بتعريف القاعدة أو القواعد التي تسمح بمقابلة كل عنصر من عناصر سـ بالعنصر المقابل في المجموعة ع ، فالتابع ع = س٢ يربط بين كل عنصر س في مجموعة التعريف سـ ومربع هذا العنصر في مجموعة الاستقرار •

ويكون التابع عدديا اذا كانت كل من مجموعة تعريفه واستقراره مجموعتين جزئيتين من مجموعة الاعداد الحقيقية ، ومثال ذلك

ع = ٣ س٢ + ٥ س + ٢

هذا ومن الممكن تعريف التوابع التالية :

اولا ــ التابع الزوجي :

نقول عن تابع أنه زوجي عندما تقابل قيمتين متناظرتين للمتحول س قيمة وحيدة للتابع ع • فالتابع ع = س٢ هو تابع زوجي ، فاذا أخذ س القيمة (ــ ٢) أو (+ ٢) فان قيمة ع المقابلة تساوي :

تا (ــ ٢)٢ = تا (+ ٢)٢ = س٢ = ٤

وبشكل عام يكون التابع زوجيا اذا تحققت العلاقة :

تا (س) = تا (ـ س)

وذلك عندما ينتمي س الى مجموعة الاعداد الحقيقية • ويمتاز الشكل البياني للتابع الزوجي بتناظره بالنسبة لمحور العينات •

ثانيا ـ التابع الفردي :

نقول عن التابع انه فردي اذا أخذ التابع قيمتين متناظرتين من أجل كل قيمتين متناظرتين للمتحول س • فالتابع ع = س^{٣} هو تابع فردي لان قيمة ع المقابلة لـ س = ٢ تساوي ٨ اما قيمة ع المقابلة لـ س=ـ٢ فتساوي (ـ ٨) ، وبمعنى آخر ، يكون التابع فرديا اذا تحققت العلاقة :

تا (ـ س) = ـ تا (س)

وذلك عندما ينتمي س الى مجموعة الاعداد الحقيقية • ويمتاز الشكل البياني للتابع الفردي بتناظره بالنسبة لمركز الاحداثيات •

ثالثا ـ التابع العكسي :

لا يشترط أن تكون العلاقة العكسية لعلاقة تابعيه تابعا ، ولا تكون العلاقة العكسية تابعا الا اذا كانت العلاقة التابعية الاصلية تطبيقا متباينا • وهكذا فالتابع ع = س^{٢} المعرف على ح$^{+}$ يقبل كعلاقة عكسية التابع س = $\sqrt{\text{ع}}$ المعرف على ح$^{+}$ • نرمز للتابع العكسي تا$^{-1}$ وهو يدل على التابع العكسي للتابع ع = تا (س) •

رابعا ـ التابع المركب :

ليكن لدينا التابعان ع = با (ص) و ص = ها (س) المعرفان على مجموعة الاعداد الحقيقية • يقابل التابع (با) كل عدد حقيقي ص بعدد واحد على الاكثر (ع) ، ويقابل التابع (ها) كل عـــدد حقيقي س بعدد واحد على الاكثر ص ، وعلى هذا فهناك علاقة تابعية بين ع و س تقابل كل عدد س بعدد واحد على الاكثر ع • هـــذه العلاقة التابعية المركبة من التابعين با و ها هي تابع التابع للمتحول س ونسميها أيضا التابع المركب ونرمز لها بـ با [هـــا (س)] •

البحث الثاني

المجـال والجـوار

سنقوم بتعريف المجال وتحديد نصف قطره ومركزه ، ثم سننتقل الى تعريف الجوار وبذلك سيشمل هذا البحث الفقرات التالية :

أولا ــ تعريف المجال •

ثانيا ــ مركز ونصف قطر المجال •

ثالثا ــ تعريف الجوار •

أولا ــ تعريف المجـال :

ليكن العددان الحقيقيان ب ، حـ حيث (ب < حـ) نسمي مجموعة الاعداد المؤلفة من العددين ب ، حـ وجملة الاعداد المحصورة بينهما بالمجال المغلق ب ، حـ ، ويكتب على الشكل [ب ، حـ] ، فاذا كـان س عددا من المجال ب ، حـ فيكون ب ⩽ س ⩽ حـ •

يسمى العددان ب ، حـ بحدي المجـال ، والفرق (حـ ــ ب) بسعة المجال • فاذا أمكن استبعاد حدي المجال حصلنا على المجـال المفتوح] ب ، حـ [واذا استبعدنا الحد ب فنحصل على مجال نصف مفتوح من الاسفل] ب ، حـ] أما اذا استبعدنا الحد حـ فنحصل على مجال نصف مفتوح من الاعلى [ب ، حـ [ويمكن تمثيل هذه المجالات بالعلاقات التالية :

المجال المغلق [ب ، حـ] حيث ب ⩽ س ⩽ حـ

المجال المفتوح] ب ، حـ [حيث ب < س < حـ

المجال نصف المفتوح من الاسفل] ب ، حـ] حيث ب < س ⩽ حـ

المجال نصف المفتوح من الاعلى [ب ، حـ [حيث ب ⩽ س < حـ •

ثانيا ـ مركز ونصف قطر المجال :

لنفرض أن مجموعة الاعداد الحقيقية ممثلة بالمحور س سَ المثل بالشكل :

وان ب ، حـ عددان حقيقيان حيث ب < حـ •

يدعى العدد (ن) الذي يحقق العلاقة ن ـ ب = حـ ـ ن بمركز المجال المفتوح] ب ، حـ [حيث ن = $\frac{\text{ب + حـ}}{\text{٢}}$ • ونسمي العدد و المعرف بالعلاقة ن ـ ب = حـ ـ ن = و بنصف قطر المجال المفتوح] ب ، حـ [لذلك اذا كان لدينا المجال المفتوح] ب ، حـ [الذي مركزه ن ونصف قطره و كان : ب = ن ـ و   أو   و = ن ـ ب

حـ = ن + و   أو   و = حـ ـ ن

أي أنه بالامكان كتابة المجال] ب ، حـ [على الشكل] ن ـ و ، ن + و [•

نظرية : اذا كان ق مركزا للمجال] ب ، حـ [، و (و) نصف قطره، فان :

س ∈] ب ، حـ [⟺ | ب ـ س | < و

البرهــان :

بما أن س ∈] ب ، حـ [⟺ ب < س < حـ

نبدل ب و حـ بقيمتيهما بدلالة مركز المجال (ن) ونصف قطره (و) :

س ∈] ب ، حـ [⟺ س ∈] ن ـ و ، ن + و [

أو ن ـ و < س < ن + و

نحلل المتراجحة الى قسمين ن ـ و < س

س < ن + و

نأخذ الطرف الاول : ن ـ و < س

ـ و < ـ ن + س

و > ن ـ س

أو ن ـ س < و

ومن الطرف الثاني س < ن + و

ـ ن + س < و

ـ (ن ـ س) < و

ومن النتيجتين السابقتين $\text{ن} - \text{س} < \text{و}$

$$-(\text{ن} - \text{س}) < \text{و}$$

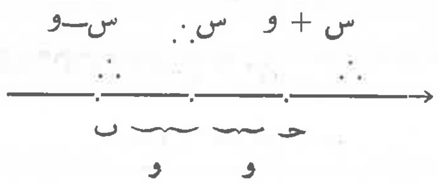
نستنتج أن : $|\text{ن} - \text{س}| < \text{و}$

وهذا يعني أن الفرق المطلق بين أية قيمة س تنتمي الى المجال $]\text{ب} ، \text{حـ}[$ ومركز المجال ن ، هو أقل من نصف قطر المجال (و) •

ثالثا ــ تعريف الجوار :

يسمى جوارا للعدد س_0 أي مجال مفتوح مركزه (س_0) ، فاذا كان (و) نصف قطر المجال فانه يمكن كتابة حدي المجال على الشكل $]\text{س}_0 - \text{و} ، \text{س}_0 + \text{و}[$ حيث (و) عدد موجب تماما •

وبمعنى آخر ، نسمي المجال $]\text{ب} ، \text{حـ}[=]\text{س}_0 - \text{و} ، \text{س}_0 + \text{و}[$ بجوار العدد س_0 اذا كان $\text{و} > 0$ وكان س_0 مركز المجال المفتوح•



البحث الثالث

النهايات

يفيد تعريف المجال والجوار وخواصهما في دراسة النهايـات التي تتضمن في هذا البحث :

أولا : نهايـة متتالية ٠

ثانيا : نهاية متحول ٠

ثالثا : نهاية تابع ٠

رابعا : خواص نهاية تابع عددي ٠

اولا ـ نهاية متتاليـة :

تعرف المتتالية بأنها مجموعة من الاعداد مرتبة وفق قانون معين يبين قيمة كل عدد منها اذا علم الرقم الذي يحملـه ضـمن الترتيب المفروض ٠

لتكن لدينا المتتالية التي حدها العام $ح_{ن} = \frac{١}{ن}$ فاننا نجد أن :

$$ح_{١} = \frac{١}{١} = ١$$

$$ح_{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$ح_{٣} = \frac{١}{٣}$$

$\vdots$

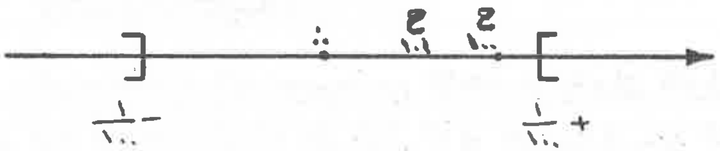
$$ح_{ن} = \frac{١}{ن}$$

لنأخذ الجوار $]-\frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠}[$ للعدد صفر ، فلما كان :

$$ح_{١٠١} = \frac{١}{١٠١} < \frac{١}{١٠٠}$$

$$ح_{١٠٢} = \frac{١}{١٠٢} < \frac{١}{١٠٠}$$

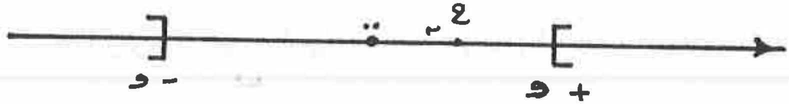
$$ح_{١٠٣} = \frac{١}{١٠٣} < \frac{١}{١٠٠}$$



فاننا نتحقق أن جميع حدود المتتالية التي رقمها أكبر من (١٠٠) تقع في هذا الجوار ، أي :

$$ن > ١٠٠ \Rightarrow ح_{ن} \in]-\frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠}[$$

وبوجه عام اذا كان]ـ و ، + و [جواراً اختياريا للعدد (٠) وأردنا أن نبحث عن حدود المتتالية التي تنتمي الى هذا الجوار فـان الشكل التالي :



يدل على أنه علينا حل المتراجحة $ح_{ن} < و$

أي $\frac{١}{ن} < و$

ومنـه $ن > \frac{١}{و}$

فاذا كان ن٠ عددا صحيحا بحيث $ن_{٠} > \frac{١}{و}$ فاننا نتحقق من أن :

$ن > ن_{٠} \Leftarrow ن > \frac{١}{و} \Leftarrow ح_{ن} < و \Leftarrow ح_{ن} \in]-و ، +و[$

أي أن جميع حدود المتتالية التي تزيد رتبتها عن ن٠ تنتمي الى ذلك الجوار •

نستنتج أن أي جوار للعدد(٠) يحوي جميع حدود المتتاليةباستثناء عدد منته منها ، أي أن جميع حدود المتتالية تكون قريبة من الصفر بقدر ما نريد أن نستثني عددا منتهيا مناسبا منها •

تعريف : نقول عن متتالية حدها العام $\text{ح}_{\text{ن}}$ أنها تنتهي الى العدد (ب) اذا كان أي جوار للعدد (ب) يحوي جميع حـدود المتتاليـة باستثناء عدد منته منها .

فاذا رمزنا بـ $\text{جو}_{\text{ب}}$ لجوار ما للعدد (ب) استطعنا صياغة التعريف السابق بالشكل التالي : يقال عن متتالية انها تنتهي الى العدد ب اذا تحقق الشرط :

$$\forall\, \text{جو}_{\text{ب}}\ \exists\, \text{ن}_{\cdot} : \text{ن} > \text{ن}_{\cdot} \Rightarrow \text{ح}_{\text{ن}} \in \text{جو}_{\text{ب}}$$

ولما كان جوار ب يساوي $]\text{ب} - \text{و} ، \text{ب} + \text{و}[$

ولما كان أيضا : $\text{ح}_{\text{ن}} \in \text{جو}_{\text{ب}} \Leftrightarrow |\text{ح}_{\text{ن}} - \text{ب}| < \text{و}$

فاننا نستطيع كتابة الشرط السابق كما يلي :

$$\forall\, \text{و} > \cdot ،\ \exists\, \text{ن}_{\cdot} : \text{ن} > \text{ن}_{\cdot} \Rightarrow |\text{ح}_{\text{ن}} - \text{ب}| < \text{و}$$

ونرمز لذلك $\text{ح}_{\text{ن}} \to \text{ب}$ عندما $\text{ن} \to \infty$

أو نها $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ب}$ عندما $\text{ن} \to \infty$

أو نها $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ب}$

ثانيا ــ نهايــة متحول :

تتطلب دراسة النهايات لتابع عددي تحديد قيمة المتحول س في مجالات تعد كمجموعات جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية •

فاذا أعطينا المتحول س قيماً آخذة بالتقارب من قيمة معينة ب ، أو بصورة أدق عندما نعطي المتحول س قيما بحيث تكون القيمــة المطلقة للتفاضل س ــ ب صغيرة بقدر ما نريد فنقول عندها اننا ننهي س الى ب ، ونرمز لذلك س ← ب ، وهذا يكافىء قولنا ان المقــدار س ــ ب ينتهي الى الصفر ، أو انه لا متناه في الصغر •

وبمعنى آخر نقول ان س ينتهي الى ب عندما تنتمي س الى مجال مفتوح ذي سعة ثابتة محتوية على ب ، فاذا رمزنا بـ (٢ و) لسعةالمجال حيث و > ٠ عدد موجب يمكن اختياره صغيرا بقدر ما نريد ، فهذا يكتب على الشكل التالي :

س ∈] ب ــ و ، ب + و [

أو ب ــ و < س < ب + و

أو | س ــ ب | < و

ونقول ان س ينتهي الى ب باتجاه اليمين اذا أنتمت س الى المجال نصف المفتوح من اليمين :

س ∈] ب ، ب + و]

أو ب < س ⩽ ب + و

ونقول ان س ينتهي الى ب باتجاه اليسار ، اذا انتمت س الى المجال نصف المفتوح من اليسار :

س ∈]ب – و ، ب]

أو ب – و ⩽ س < ب

ونقول كذلك ان س ينتهي الى اللانهاية س ← ∞ :

ـ بقيم موجبة اذا انتمى س الى المجال المفتوح الممتد الى اليمين
]ب ، + ∞[حيث س > ب •

ـ بقيم سالبة اذا انتمى س الى المجال المفتوح الممتد الى اليسار
]ـ ∞ ، ـ ب[حيث س < ب •
حيث ب عدد حقيقي نختاره كبيرا جدا بقدر ما نريد •

مثـــال :

اذا فرضنا أن ب = ٥

س : ٥ر١ ٥ر٠١ ٥ر٠٠١ ٥ر٠٠٠١ ٥ر٠٠٠٠١

فان س ← ٥ ، أي أن س تنتهي الى العدد (٥) من جهة اليمين ، في حين أن :

س : ٤ر٩ ٤ر٩٩ ٤ر٩٩٩ ٤ر٩٩٩٩ ٤ر٩٩٩٩٩

فان س ← ٥ ، أي أن س تنتهي الى العدد (٥) من جهة اليسار •

ثالثا ــ نهايــة تابــع :

تدرس نهايات قيمة التابع بتحديد مجالات من مجموعة الاعــداد الحقيقية التي تنتمي اليها الصورة (ع) • نقول ان التابع (ع) = تا(س)

ينتهي الى نهاية ما (حـ) عندما ينتهي س الى ب فيما اذا انتهى الفرق | تا (س) — حـ | الى الصفر بوقت واحد مع الفرق | س — ب | .

مثال : لنأخذ التابع ع = س^٢ . نلاحظ أن ع = ١ عندما س = ١ لنعط س قيما مجاورة للواحد من جهتيه ، ولنحسب القيم المقابلة للتابع ع فنجد الجدول التالي :

س	ع	س	ع
١ر٢	١ر٤٤	٠ر٨	٠ر٦٤
١ر٠٥	١ر١٠٢٥	٠ر٩٥	٠ر٩٠٢٥
١ر٠٠٢	١ر٠٠٤٠٠٤	٠ر٩٩٨	٠ر٩٩٦٠٠٤
١ر٠٠١	١ر٠٠١٠٠١	٠ر٩٩٩	٠ر٩٩٨٠٠٠١

ونلاحظ أنه كلما اقتربت س من الواحد اقتربت قيم ع من الواحد ، وبمعنى آخر فان الفرق ع — ١ = س^٢ — ١ يمكن أن يصبح أصغر من أي عدد مفروض سلفا بشرط أن يكون المتحول س مجاورا بقدر كاف للواحد .

وبشكل أدق ، تنتهي القيمة ع = تا (س) للتابع (تا) نحو نهاية حـ عندما ينتهي س الى ب ، اذا انتمت ع الى مجال مفتوح يحتوي حـ وبسعة (٢ و) عندما ينتمي س الى مجال مفتوح يحتوي ب وسعته (٢ م) حيث (م ، و) عددان موجبان حقيقيان مختاران صغيرين بقدر ما نريد ، وهذا يكتب على الشكل التالي :

س ∈] ب — م ، ب + م [⇐ ع ∈] حـ — و ، حـ + و [

أو ب — م < س < ب + م ⇐ حـ — و < ع < حـ + و

أو | س — ب | < م ⇐ | ع — حـ | < و

رابعا ـ خواص نهاية تابع عددي :

من الممكن البرهان على الخواص التالية لنهاية تابع عددي :

١ ـ اذا كان للتابع نهاية ما فانها تكون نهاية واحدة فقط •

٢ ـ اذا كانت القيمة ع للتابع (تا) مؤلفة من مجموع قيمتين ص ، ف حيث ينتهي ص الى ب ، و ف الى ح عندما ينتهي س الى د ، فان قيمة التابع ع تنتهي الى القيمة ب + ح ، وهذا ما يعبر عنه بالنظرية التالية : نهاية المجموع الجبري لعدد من التوابع يساوي الى المجموع الجبري لنهايات هذه التوابع •

٣ ـ اذا كانت القيمة ع للتابع (تا) مؤلفة من جداء قيمتين ص ، ف حيث تنتهي ص الى ب ، و ف الى ح عندما ينتهي س الى د ، فان قيمة التابع ع تنتهي الى القيمة ب • ح • وهذا ما نعبر عنه بالنظرية التالية : نهاية حاصل ضرب عدد محدود من التوابع يساوي الى حاصل ضرب نهايات هذه التوابع •

٤ ـ اذا كانت القيمة ع للتابع (تا) مؤلفة من حاصل قسمة قيمتين ص و ف حيث ينتهي ص الى ب ، و ف الى ح عندما ينتهي س الى د فان قيمة التابع ع تنتهي الى القيمة $\frac{\text{ب}}{\text{ح}}$ (حيث ح ≠ ٠)

وهذا ما نلخصه بالنظرية التالية :

نهاية حاصل قسمة تابعين تساوي حاصل قسمة نهاية الصورة على نهاية المخرج شريطة ألا تكون نهاية المخرج مساوية للصفر •

أمثلة على النهايات :

١ ـ ما هي نهاية التابع $ع = \frac{٣ س + ٤}{س + ٢}$ عندما $س \leftarrow \mp \infty$

ان هذا التابع كسري معرف على ح ـ { ـ ٢ }

لنقسم الصورة والمخرج على س :

$$ع = \frac{\frac{٣س}{س} + \frac{٤}{س}}{\frac{س}{س} + \frac{٢}{س}}$$

لننه س الى $\mp \infty$ فيكون $ع = \frac{٣ + ٠}{١ + ٠} = ٣$

اذن تنتهي ع الى ٣ عندما تنتهي س الى $\mp \infty$.

٢ ـ ماهي نهاية س عندما يسعى ع الى القيمة ٣ في التابع $ع = \sqrt{س + ٧}$

نربع الطرفين : $ع^٢ = س + ٧$

أو $س = ع^٢ - ٧$

عندما $ع \leftarrow ٣$ فان $ع^٢ \leftarrow ٩$

نعوض $س = ٩ - ٧ = ٢$

أي أن $س \leftarrow ٢$ عندما $ع \leftarrow ٣$

البحث الرابع

الاستمرار

تشمل دراسة الاستمرار تعريف الاستمرار في نقطة ومن ثم تعريف الاستمرار على مجال •

أولا ــ تعريف الاستمرار في نقطة :

يقال عن التابع (تا) المعرف على المجال] ك ، ل [أنه مستمر في النقطة س_0 من هذا المجال اذا قبل النهاية $\text{ع}_0 = \text{تا}(\text{س}_0)$ عندما $\text{س} \to \text{س}_0$ ، وبتعبير آخر يكون التابع مستمراً في النقطة س_0 اذا :

$$\text{س} \in]\text{س}_0 - \text{ب} ، \text{س}_0 + \text{ب}[\Leftarrow$$

$$\text{ع} \in]\text{ع}_0 - \text{ح} ، \text{ع}_0 + \text{ح}[$$

ويكون التابـع مستمرا في النقطـة س_0 اذا تحققت الشروط التالية :

١ ــ س_0 ينتمي الى مجموعة تعريف التابع •

٢ ــ للتابع نهاية في جوار س_0 عندما $\text{س} \to \text{س}_0$

٣ ــ قيمة هذه النهاية هي تا (س.) ، أي :

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{س}_.} \text{تا}(\text{س}) = \text{تا}(\text{س}_.)$$

ويمكن للتابع أن يكون متقطعا في النقطة س. لسببين :

١ ــ اذا لم يكن التابع معرفا في س. .

٢ ــ اذا اختلفت النهاية س. حسبما ينتهي س ← س. من اليمين أو من اليسار .

مثال : ليكن التابع المعرف بالعلاقة $\text{ع} = \frac{2}{\text{س} - 5}$ ، ان هـذا التابع متقطع في النقطة س. = ٥

فعندما س ← ٥ بقيمة أكبر من ٥ فان ع ← + ∞

وعندما س ← ٥ بقيمة أصغر من ٥ فان ع ← − ∞ .

بينما يكون التابع غير معرف في النقطة س = ٥

ويمكن تعريف الاستمرار في نقطة باستخدام مفهوم التزايد :

$$\Delta \text{س} = \text{س} - \text{س}_.$$

$$\Delta \text{ع} = \text{ع} - \text{ع}_.$$

حيث أن هذه التزايدات أعدادا يمكننا أن نختارها صغيرة بقدر ما نريد ، إن نظرية استمرار التابع العددي في نقطة ما تأخذ الشكل التالي :

حتى يكون التابع (تا) مستمرا في النقطة س. يجب ويكفي أن يتناهى التزايد Δ ع الى الصفر عندما ينتهي التزايد Δ س الى الصفر •

ثانيا ــ تعريف الاستمرار على مجال :

يكون التابع (تا) المعرف على مجال محدد مستمر على هــذا المجال اذا كان مستمرا في كل نقطة من هذا المجال ، ونقول عن تابع أنه مستمر دون توضيح المجال فيما اذا كان مستمرا في كل نقطة مــن مجموعة التعريف •

وبمعنى آخر ، يكون التابع ع = تا (س) مستمرا بين الحدين (ب ، حـ) اذا كانت كل قيمة للمتحول س واقعة بين هذين الحدين تناظرها قيمة محددة للتابع ، واذا كان بالاضافة الى ذلك كل تغيير متناه في الصغر يطرأ على المتحول س ينتج منه تغيير متناه في الصغر أيضا في التابع ع •

* * *

البحث الخامس

اتجاه التغيرات النسبية للتابع والمتحول

ليكن (تا) تابع معرف على المجال [ب ، حـ] ، ليأخذ المتحول س على التوالي القيمتين $س_1$ ، $س_2$ المنتميتين الى المجال [ب ، حـ] ان تزايد المتحول س هو Δس = $س_2$ - $س_1$ ، يقابل هاتين القيمتين $س_1$ ، $س_2$ الصورتان $ع_1$ = تا ($س_1$) ، $ع_2$ = تا ($س_2$) ، فعندما يأخذ المتحول س القيمتين $س_1$ ، $س_2$ يأخذ التابع القيمتين $ع_1$ ، $ع_2$ ، فالتزايد المتعلق بالصورتين هو Δ ع = $ع_2$ - $ع_1$ • سندرس أولا التابع المتزايد ثم نناقش التابع المتناقص •

اولا ـ التابع المتزايد :

يكون التابع متزايداً ، في مجال ما ، اذا كانت قيمة التابع تتزايد نتيجة لتزايد قيمة المتحول وتتناقص بتناقصه (مثال : ع=٢س+٦) ، ويمثل التابع علاقة طردية بين المتغيرين ، أي أنهما يتغيران بالاتجاه نفسه •

وبصورة أدق ، يسمى التابع ع = تا (س) متزايدا تماما في المجال [ب ، حـ] اذا وفقط اذا :

$$س_2 > س_1 \Leftarrow ع_2 > ع_1$$

حيث $س_١ ، س_٢ \in [ب ، حـ]$

أي أن $\frac{\Delta ع}{\Delta س} < ٠$

ويكون التابع متزايدا اذا كان :

$س_٢ > س_١ \Leftarrow ع_٢ \geqslant ع_١$

أو $\frac{\Delta ع}{\Delta س} \geqslant ٠$

مثال :

التابع $ع = س^٢ + ١$ هو تابع متزايد

$س_١ = ١$ $ع_١ = ٢$

$س_٢ = ٣$ $ع_٢ = ١٠$

$س_٢ > س_١ \Leftarrow ع_٢ > ع_١$

$\Delta ع = ٨$ $\Delta س = ٢$

اذن $\frac{\Delta ع}{\Delta س} = ٤ > ٠$

أما اذا كان $س_١ = -١$ فان $ع_١ = ٢$

$س_٢ = ١$ فان $ع_٢ = ٢$

وهكذا فان $س_٢ > س_١$ في حين أن $ع_٢ = ع_١$

ثانيا ـ التابع المتناقص :

نقول عن تابع ما انه متناقص ضمن مجال ما ، اذا كانت قيمة التابع ع تتناقص بتزايد قيمة المتحول س في ذلك المجال أو تتزايد بتناقصه (مثال ع = − ٥ س − ٢) ، ويدل هذا التابع على علاقة عكسية بين المتغيرين .

وبصورة أدق ، يدعى التابع متناقصا تماما في المجال [ب ، جـ] اذا وفقط اذا :

$$\forall \text{ س}_١ ، \text{س}_٢ \in [\text{ب} ، \text{جـ}]$$

$$\text{س}_٢ > \text{س}_١ \Leftarrow \text{ع}_٢ < \text{ع}_١$$

أي أن $\dfrac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} < ٠$

ويكون متناقصا اذا كان :

$$\text{س}_٢ > \text{س}_١ \Leftarrow \text{ع}_٢ \leqslant \text{ع}_١$$

أو $\dfrac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} \leqslant ٠$

مثال : ع = − ٣ س + ١

$\text{س}_١ = ١$ $\qquad$ $\text{ع}_١ = -٢$

$\text{س}_٢ = ٥$ $\qquad$ $\text{ع}_٢ = -١٤$

Δ س = ٤ $\qquad\qquad$ Δ ع = − ١٢ :

$$\text{اذن} \quad \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} = \frac{-١٢}{٤} = -٣$$

أما اذا كانت Δ ع في مجال معين معدومة تماما ، فان التابع يكون ثابتا في هذا المجال ، واذا كان التابع (تا) متزايدا دائما أو متناقصا دائما في مجال معين فيسمى التابع وحيد الطور في هذا المجال •

* * *

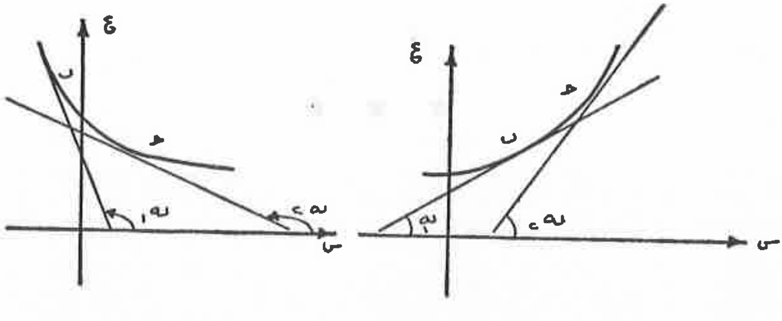
البحث السادس

التقعـر

يكون التقعر نحو العينات الموجبة أو نحو العينات السالبة :

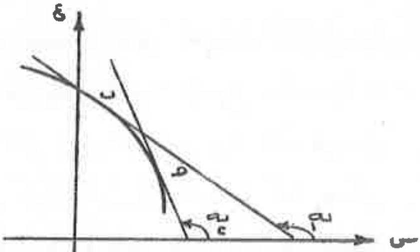
اولا : التقعر نحو العينات الموجبة :

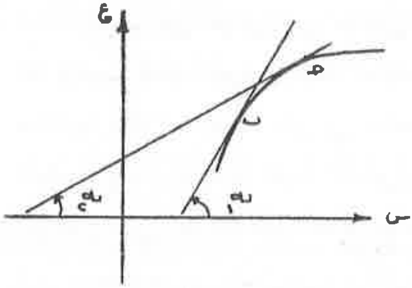
نقول عن قوس من منحنى أنها متقعرة نحو العينات الموجبـة اذا وقعت هذه القوس بجهة العينات الموجبة بالنسبة لجميع مماساتها • وعندما يكون الخط البياني متقعرا نحو العينات الموجبة فان ميـل المماس يزداد بازدياد قيمة المتحول س ويتناقص بتناقصه ، كما يمكن البرهان على أنه اذا كان التابع ع = تا (س) قابلا للاشتقاق في المجال] ب ، حـ [مرتين متتاليتين ، وكان مشتقه الثاني ع″ = تا″ (س) موجبا في هذا المجال فان تقعر المنحنى البياني يتجه نحو العينات الموجبـة في المجال المذكور •



ثانيا : التقعر نحو العينات السالبة :

يكون قوس من منحنى متقعر نحو العينات السالبة اذا وقعت هذه القوس بجهة العينات السالبة بالنسبة لجميع مماساتها وعندما يكون المنحنى البياني متقعرا نحو العينات السالبة فان ميل المماس يتناقص بتزايد قيمة المتحول س ويتزايد بتناقصه ، كما يمكن البرهان على أنه اذا كان التابع ع = تا (س) قابلا للاشتقاق في المجال] ب ، حـ [مرتين متتاليتين وكان مشتقه الثاني ع″ = تا″ (س) سالبا في هذا المجال فان تقعر المنحنى البياني يتجه نحو العينات السالبة في المجال] ب ، حـ [.





★ ★ ★

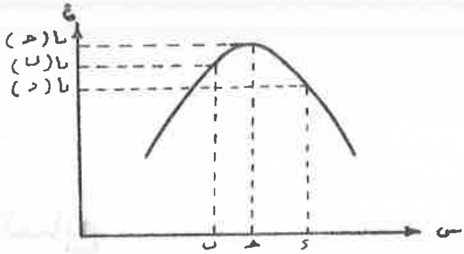
البحث السابع

النهايات الحديـــة

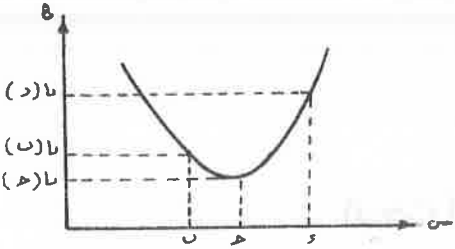
بالاستناد الى مفهومي الاشتقاق والتقعر ، نقول ان التابـع ع = تا (س) القابل للاشتقاق على مجموعة تعريفه يقبل نهاية حديــة من أجل س = حـ اذا غير المشتق اشارته عندما س = حـ ، واذا كان المشتق الاول ع′ مستمرا عند النقطة س = حـ ، ويمكن التمييز بين نوعين من النهايات الحدية : النهاية الحدية العظمى ، والنهاية الحدية الصغرى .

اولا : النهاية الحدية العظمى :

يقال ان للمنحنى نهاية عظمى عند نقطة مثل (حـ) اذا كانت قيمة التابع عند (حـ) أكبر من قيمته عند كل من النقطتين (ب ، د) المحيطتين بها والقريبتين منها قربا كافيا . فاذا كان التابع متزايدا في المجـال] ب ، حـ] ومتناقصا في المجال [حـ ، د [فان هذا التابع يقبـل على المجال] ب ، د [نهاية عظمى تساوي ع = تا (حـ) . ونلاحظ أن المنحنى البياني للتابع ع = تا(س) المستمر هو ومشتقه يبلغ نهاية عظمى من أجل س = حـ فقط وفقط اذا كان المشتق الثاني سالبا تا″ (حـ) < ٠ والمشتق الاول معدوما تا′ (حـ) = ٠ في النقطة (حـ) .



ـ نهاية عظمى ـ



ـ نهاية صغرى ـ

ثانيا : النهاية الحدية الصغرى :

كما يقال ان للمنحنى نهاية صغرى عند نقطة (حـ) اذا كانت قيمة التابع عند (حـ) أصغر من قيمتها عند كل من النقطتين ب ، د المحيطتين بها والقريبتين قربا كافيا منها • فاذا كان التابع متناقصا في المجال]ب،حـ[ومتزايدا في المجال [حـ ، د [فانه يقبل في المجال] ب ، د[نهاية صغرى تساوي ع = نا (حـ) • ونلاحظ أن المنحنى البياني للتابع ع = نا(حـ) يتقعر نحو العينات الموجبة عند النهاية الحدية الصغرى وفي جوار لها ، لذلك فان هذا التابع المستمر هو ومشتقه يبلغ نهاية حدية صغرى من أجل س = حـ فقط وفقط اذا كان المشتق الثاني موجبا نا″ (حـ)> ٠ والمشتق الاول معدوما نا′ (حـ) = ٠ في النقطة (حـ) •

وبشكل عام لكي يمر التابع بنهاية حدية لابد من تحقيق شرطين، الشرط من المرتبة الاولى ويتحقق بانعدام المشتق الاول ، والشرط من المرتبة الثانية ويتحقق اذا كان المشتق الثاني سالبا في النهايـة العظمى وموجبا في النهاية الصغرى •

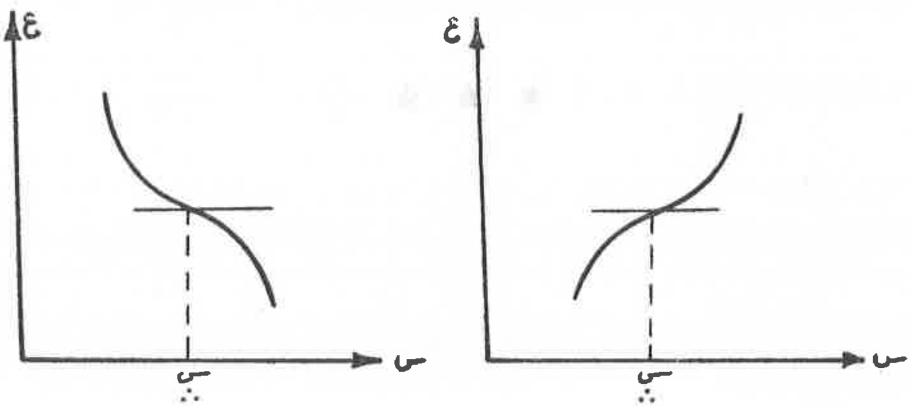
البحث الثامن

الانعطاف

نسمي النقطة (س.) من منحنى التابع ع = تا (س) والتي يغير فيها المنحنى جهة تقعره بنقطة الانعطاف ، وهكذا يمر المنحنى البياني للتابع المذكور القابل للاشتقاق مرتين متتاليتين في المجال]ب،حـ[بنقطة انعطاف من أجل س ∈] ب ، حـ [اذا غير المشتق الثاني ع″ = تا″ (س) اشارته من الموجب الى السالب أو بالعكس عند س = س. ، واذا كان المشتق الثاني مستمرا عند س = س. فهذا يعني أن المشتق الثاني ينعدم من أجل هذه القيمة ويغير اشارته .

يمكن التمييز بين نوعين من نقاط الانعطاف ، نقاط الانعطاف المستقرة ونقاط الانعطاف غير المستقرة . تكون نقطة الانعطاف مستقرة اذا تحققت العلاقات التالية :

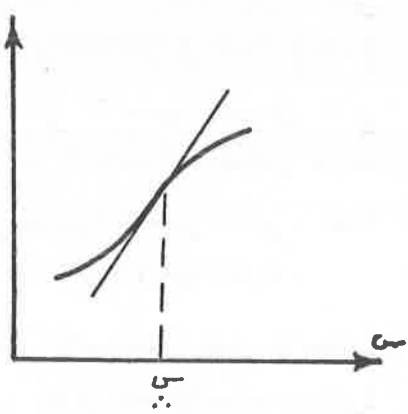
تا′ (س.) = ٠ تا″ (س.) = ٠ تا‴ (س.) ≠ ٠

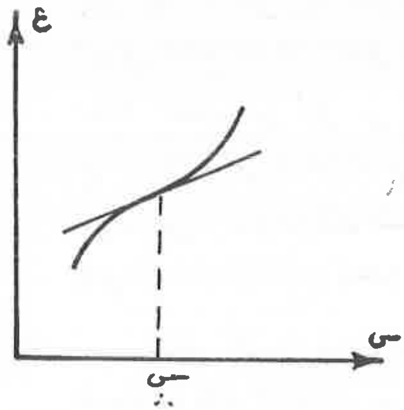


وتكون نقطة الانعطاف غير مستقرة ، اذا تحققت العلاقات :

$$\text{ما}'(\text{س}_{٠}) \neq ٠ \qquad \text{ما}''(\text{س}_{٠}) = ٠ \qquad \text{ما}'''(\text{س}_{٠}) \neq ٠$$

ومما يذكر فان التطبيقات الاقتصادية ترتبط غالبا بنقاط الانعطاف غير المستقرة .



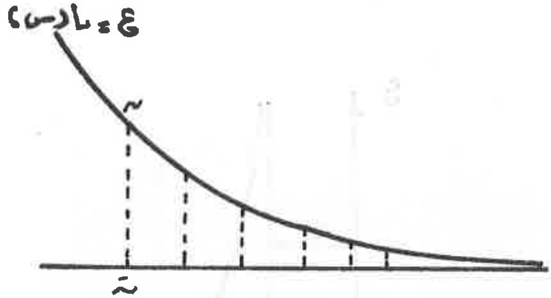


★ ★ ★

البحث التاسع

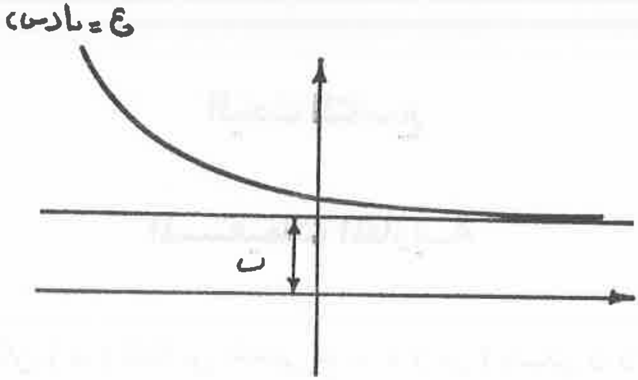
المستقيمات المقاربـة

لتكن (ن) نقطة من المنحنى ع = تا (س) وليكن ن نَ بعدها عن المستقيم (د) ، نقول عن المستقيم (د) انه مستقيم مقارب للمنحنى ع اذا تناهى البعد ن نَ الى الصفر عندما تبتعد النقطة ن عن المنحنى بلاتناه ، ومن المستقيمات المقاربة ما هو مواز لأحد المحورين الاحداثيين ومنها ما هو مائل لا يوازي أي من المحورين •



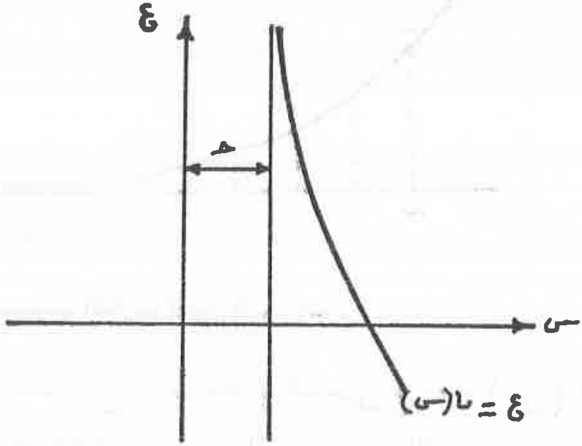
اولا : المستقيم المقارب لمحور السينات :

يكون المستقيم ع = ب مقاربا للمنحنى ع = تا (س) فيما اذا انتهى ع الى ب عندما ينتهي س الى $\mp \infty$ ، أي ع ← ب عندما س ← $\mp \infty$ •



ثانيا : المستقيم المقارب لمحور العينات :

يكون المستقيم س = حـ مقاربا للمنحنى ع = ما (س) فيما اذا انتهى س الى حـ عندما ينتهي ع الى اللانهاية ، أي س ← حـ عندما ع ← $\mp \infty$.

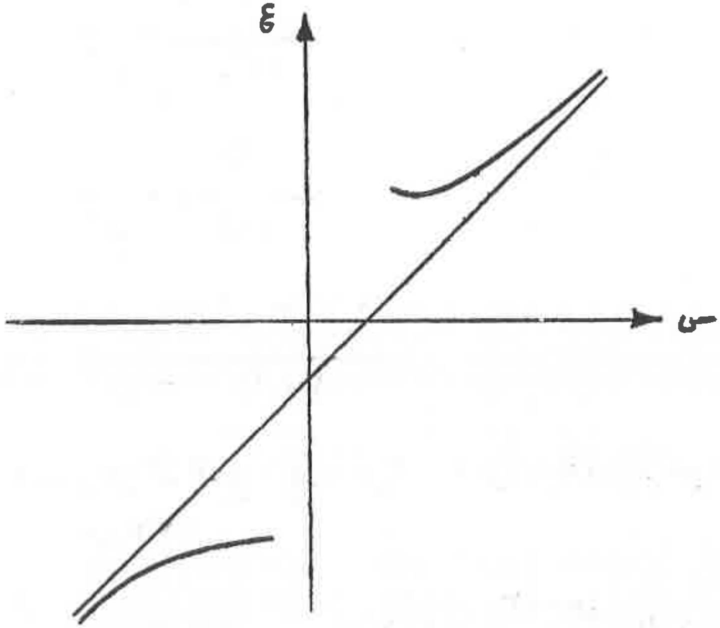


ثالثا : المستقيم المقارب المائل :

ان معادلة المستقيم المقارب المائل هي من الشكل ع = م س + ل

$$\text{حيث م} = \lim_{\text{س} \to \mp\infty} \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$\text{و ل} = \lim_{\text{س} \to \mp\infty} (\text{ع} - \text{م س})$$



تطبيقات عملية

١ ـ أوجد نهاية كل من المتتاليات التالية :

$$ح_ن = \frac{ن}{ن+٣}$$

$$ح_ن = \frac{ن^٢}{٢ن^٢-١}$$

$$ح_ن = \frac{٢ - ٣ن^٢}{ن^٢+١}$$

$$ح_ن = \frac{ن^٢}{ن+١}$$

$$ح_ن = \frac{٢ن^٢ + ٣ن + ١}{ن^٢ + ١}$$

٢ ـ برهن أن التابع : ع = $س^٢$ − ٢ س + ٣ مستمر من أجل
س = ٣ ٠

٣ ـ برهن أن التابع : ع = تا(س) = $\frac{٣ - س}{س + ٣}$ المعرف على
ح − { − ٣ } مستمر من أجل س = ١

٤ ــ هل التابع ع = $\frac{٢+س}{س^٢+٩}$ المعرف على ح − { −٣ ، ٣ + } مستمر على المجال [ــ ٢٥ ، ــ ١] •

٥ ــ هــل التابــع ع = تا (س) = $\frac{س + ٤}{س^٢-١٦}$ المعــرف على ح − { − ٤ ، + ٤ } مستمر من أجل القيمة س = − ٤ •

٦ ــ ليكن التابع ع = تا (س) = $\sqrt{س - ١٦}$ والمطلوب :

آ ــ عين مجموعة تعريف هذا التابع •

ب ــ هل التابع مستمر من أجل القيمة س = − ٢

حـ ــ هل التابع مستمر على المجال [٥ ، ٨]

٧ ــ أوجد نهايات التوابع التالية :

$$\lim_{س \to ١} ع = س^٢ + ٣ س - ٢$$

$$\lim_{س \to ٢} ع = (س^٢ - ١)(س + ٣)$$

$$\lim_{س \to ٢} ع = \frac{س^٢ + ١}{٢س - ٣}$$

$$\lim_{س \to ٠} ع = \frac{٣س^٢-٣س}{٧ س}$$

الفصل التاسع

المشتقات

سندرس في هذا الفصل تعريف المشتق في نقطة ثم التابع المشتق ، ثم نقوم بتمثيل المشتق هندسيا وأخيرا سنذكر ببعض القواعد المستخدمة في حساب المشتقات •

اولا ــ تعريف المشتق في نقطة :

ليكن التابع ع = تا (س) المعرف والمستمر • لنعط المتحول س قيمة محددة ($س_1$) فيأخذ التابع ع قيمة مقابلة تساوي ($ع_1$) • ثم لنعط المتحول قيمة أخرى ولتكن ($س_2$) فيأخذ التابع قيمة تساوي ($ع_2$) •

نسمي تغير المتحول الفرق بين قيمتي المتحول ونرمز له بـ (Δس) حيث :

$$\Delta س = س_2 - س_1$$

ونسمي تغير التابع الفرق بين قيمتي التابع ونرمز له بـ (Δ ع) حيث :

$$\Delta ع = ع_2 - ع_1$$

نعرف مشتق التابع ع = تا (س) في النقطة (س_1) ونرمز له بـ ع َ = تا َ (س_1) على أنه نهاية النسبة بين تغير التابع وتغير المتحول وذلك عندما يسعى تغير المتحول الى الصفر ، أي :

$$\text{ع}' = \text{تا}'(\text{س}_1) = \underset{\text{س}_2 \to \text{س}_1}{\text{نها}} \frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\text{أو} \qquad \text{ع}' = \underset{\Delta\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{تا}(\text{س}_1 + \Delta\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_1)}{(\text{س}_1 + \Delta\text{س}) - (\text{س}_1)}$$

$$\text{أو} \qquad \text{ع}' = \underset{\Delta\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}}$$

يعكس المشتق اتجاه ومقدار التغيرات في التابع نتيجة لتغيرات متناهية في الصغر في المتحول ، فاذا كانت تغيرات التابع Δ ع من الاشارة الجبرية نفسها لتغيرات المتحول Δ س فيكون المشتق من إشارة موجبة ، أما اذا كانت تغيرات التابع Δ ع من اشارة جبرية مخالفة لتغيرات Δ س فيكون المشتق من اشارة سالبة .

ثانيا ـ التابع المشتق :

اذا كان التابع ع = تا (س) قابلا للاشتقاق على مجموعة تعريفه، فاننا نستطيع ايجاد قيم المشتق المقابلة لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتحول س وهكذا فان مجموعة قيم المتحول س والقيم التي يأخذها

المشتق في تلك القيم تعرف تابعا نسميه بالتابع المشتق . ونرمز له بـ $ع' = تا'(س)$.

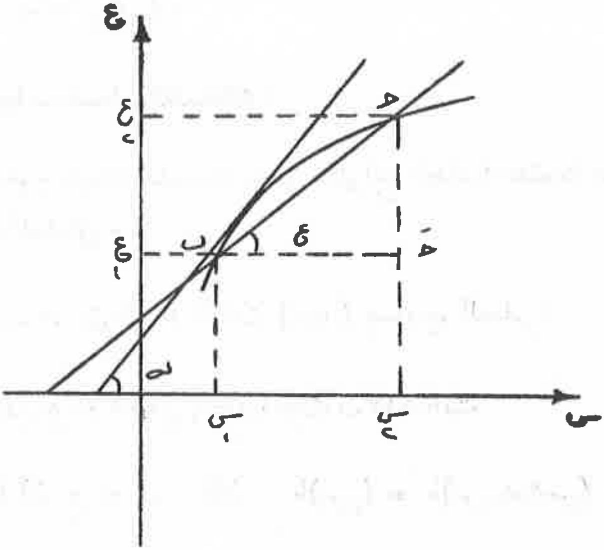
ثالثا ـ التمثيل الهندسي للمشتق :

لنأخذ التابع $ع = تا(س)$ المعرف على المجال [ب ، حـ]، لنرسم المنحنى للتابع حيث تمثل $(س_1 ، ع_1)$ احداثيات النقطة ب ، وتمثل $(س_2 ، ع_2)$ احداثيات النقطة حـ ، ثم لنرسم قاطع المنحنى المار بالنقطتين (ب ، حـ) . نلاحظ من الشكل أن :

$$\Delta س = س_2 - س_1$$

$$\Delta ع = ع_2 - ع_1$$

كما نلاحظ أن $\Delta س =$ حـ' ب مجاور الزاوية (عه) التي يصنعها القاطع مع محور السينات . كذلك فان $\Delta ع$ يساوي حـ حـ' مقابل



الزاوية (عه) •

$$\text{تساوي النسبة :} \quad \frac{\Delta ع}{\Delta س} = \frac{حـ حـ}{حـَ ب}$$

ظل الزاوية (عه) التي يشكلها القاطع مع محور السينات •

وعندما يسعى Δ س الى الصفر ، فان النقطة حـ سوف تنطبق على النقطة ب ، نتيجة لذلك سوف يتحول القاطع ب حـ الى مماس لمنحنى التابع في النقطة ب ، وستتحول الزاوية (عه) الى الزاوية (ىه)،

وبذلك فان نهاية النسبة $\frac{\Delta ع}{\Delta س}$ عندما يسعى Δس الى الصفر تساوي

ميل المماس في النقطة ب التي احداثياتها ($س_1$ ، $ع_1$) • وبما أن هـذه النسبة هي بالتعريف المشتق عَ = تاَ ($س_1$) ، فان المشتق في النقطة $س_1$ يمثل هندسيا ميل المماس في نقطة التماس (ب) التي سيناتهـا ($س_1$) وعيناتها ($ع_1$) •

رابعا ـ حساب المشتقات :

سنقوم بايجاد مشتقات بعض التوابع الخاصة اعتماداً على الصيغة التعريفية للمشتق •

آ ـ مشتق العدد الثابت (ب) يساوي الصفر :

ليكن ع = تا (س) = ب حيث ب عدد ثابت

بما أن ع = ب فان تا($س_2$) = تا($س_1$+Δس) = ب

وبالتالي فان Δ ع = تا (س$_1$ + Δ س) − تا (س$_1$) = ٠

ومنه :

$$\text{ع}' = \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{تا}(\text{س}_1 + \Delta \text{س}) - \text{تا}(\text{س}_1)}{(\text{س}_1 + \Delta \text{س}) - (\text{س}_1)} = \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\Delta \text{س}} = ٠$$

ب ــ مشتق التابع ع = تا (س) = س يساوي الواحد الصحيح .

ليكن ع = تا (س) = س

لنعط س تزايدا قدره Δ س فيأخذ ع تزايدا قدره Δ ع

ع + Δ ع = س + Δ س

Δ ع = (س + Δ س) − ع لنعوض ع بقيمتها س

Δ ع = (س + Δ س) − (س)

Δ ع = Δ س

$$\text{ومنه ع}' = \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} = ١$$

ونظرا لان ع = س فان ع′ = س′ = ١ أي أن مشتق المتحول س يساوي أيضا الواحد .

حـ ــ مشتق التابع ع = تا (س) = ب س يساوي أمثال س .

ليكن ع = تا (س) = ب س

لنعط س تزايدا قدره Δ س فيأخذ ع تزايدا قدره Δ ع

ع + Δ ع = ب (س + Δ س)

ع + Δ ع = ب س + ب • Δ س

Δ ع = ب س + ب • Δ س − ع

نبدل ع بقيمتها ب س ،

Δ ع = ب س + ب • Δ س − ب س

Δ ع = ب • Δ س

$$\frac{\Delta ع}{\Delta س} = ب$$

$$ع' = نها \frac{\Delta ع}{\Delta س} = ب$$

Δ س ← ٠

مثال : مشتق التابع ع = ٨ س يساوي ٨ •

د ــ مشتق مجموع تابعين يساوي مجموع مشتقيهما •

ليكن ع = ص + ف حيث ص و ف تابعان للمتحول س ، أي

ص = ها (س)

ف = عا (س)

عندما نعطي س تزايدا قدره Δ س فان ص و ف و ع تأخذ تزايدات قدرها Δ ص ، Δ ف ، Δ ع ، أي :

$$\text{ع} + \Delta\text{ع} = (\text{ص} + \Delta\text{ص}) + (\text{ف} + \Delta\text{ف})$$

$$\text{ع} + \Delta\text{ع} = \text{ص} + \Delta\text{ص} + \text{ف} + \Delta\text{ف}$$

$$\text{ع} + \Delta\text{ع} = (\text{ص} + \text{ف}) + (\Delta\text{ص} + \Delta\text{ف})$$

$\Delta\text{ع} = (\text{ص} + \text{ف}) + (\Delta\text{ص} + \Delta\text{ف}) - \text{ع}$ نعوض ع بقيمتها

$$\Delta\text{ع} = (\text{ص} + \text{ف}) + (\Delta\text{ص} + \Delta\text{ف}) - (\text{ص} + \text{ف})$$

$$\Delta\text{ع} = \Delta\text{ص} + \Delta\text{ف}$$

وبالتقسيم على Δ س وبانهاء Δ س للصفر يكون :

$$\text{نها}\ \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}} = \text{نها}\ \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} + \text{نها}\ \frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{س}}$$

$$\Delta\text{س} \leftarrow \therefore \quad \Delta\text{س} \leftarrow \therefore \quad \Delta\text{س} \leftarrow \therefore$$

أو $\text{ع}' = \text{ص}' + \text{ف}'$

مثـــال :

$$\text{ع} = ٣\,\text{س} + ١٥\,\text{س}$$

$$\text{ع}' = ٣ + ١٥$$

ويمكن تعميم القاعدة السابقة بقولنا ان مشتق مجموع عـدة توابع يساوي الى مجموع مشتقات هذه التوابع ، أي :

$\text{ع} = \text{ص}_١ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣ \cdots + \text{ص}_\text{ن}$ حيث ص توابع لـ س

فان :

$$ع' = ص'_١ + ص'_٢ + ص'_٣ + \cdots + ص'_ن$$

هـ ـ مشتق جداء تابعين يساوي مشتق التابع الاول في التابع الثاني زائدا مشتق التابع الثاني في التابع الاول :

$$\text{ليكن } ع = تا(س) = ص \cdot ف$$

$$\text{حيث} \quad ص = ها(س)$$

$$ف = عا(س)$$

$$ع = تا(س)$$

اذا أعطينا المتحول س تزايدا قدره $\triangle$ س فان كل من التوابع ص ، ف ، ع ستأخذ تزايدات مقدارها على التوالي $\triangle$ ص ، $\triangle$ ف ، $\triangle$ ع ، وهكذا فان :

$$ع + \triangle ع = (ص + \triangle ص)(ف + \triangle ف) \text{ وبفك الاقواس}$$

$$ع + \triangle ع = ص ف + ص \cdot \triangle ف + ف \cdot \triangle ص + \triangle ص \cdot \triangle ف$$

وبنقل ع للطرف الثاني وبتبديل قيمته بـ ص•ف يكون :

$$\triangle ع = ص \cdot ف + ص \cdot \triangle ف + ف \cdot \triangle ص + \triangle ص \cdot \triangle ف - ص \cdot ف \text{ وبالاختصار :}$$

$$\triangle ع = ص \cdot \triangle ف + ف \cdot \triangle ص + \triangle ص \cdot \triangle ف \cdot$$

وبقسمة طرفي المساواة على Δ س وبانهاء Δ س الى الصفر يكون:

$$\underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} = \text{ص}\ \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{س}} + \text{ف}\ \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} + \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \cdot \Delta \text{ف}$$

وحيث أن Δ ف ← ٠ عندما Δ س ← ٠ ينتج أن :

$$\text{ع}' = \text{ص} \cdot \text{ف}' + \text{ف} \cdot \text{ص}' + ٠ \quad \text{أو}$$

$$\text{ع}' = \text{ص}' \cdot \text{ف} + \text{ف}'\,\text{ص}$$

وهذا يعني أن مشتق جداء تابعين يساوي مشتق الاول في الثاني زائدا مشتق الثاني في الاول • مثال :

$$\text{ع} = (٢\text{س} + ٥)(٣\text{س} + ٧)$$

$$\text{ع}' = ٢(٣\text{س} + ٧) + ٣(٢\text{س} + ٥)$$

ومن الممكن تعميم قاعدة مشتق جداء تابعين على النحو التالي : ان مشتق جداء عدة توابع يساوي مشتق التابع الاول مضروبا ببقية التوابع زائدا مشتق التابع الثاني مضروبا ببقية التوابع وهكذا ، أي :

$$\text{ع} = \text{ص} \cdot \text{ف} \cdot \text{ط}$$

$$\text{ع}' = \text{ص}' \cdot \text{ف} \cdot \text{ط} + \text{ف}' \cdot \text{ص} \cdot \text{ط} + \text{ط}' \cdot \text{ص} \cdot \text{ف} \ \cdot$$

وبشكل عام ، اذا كان :

$ع = ص_{١} \cdot ص_{٢} \cdot ص_{٣} \cdots ص_{ن}$ حيث ص توابع لـ س فان

$$ع' = ص'_{١} \cdot ص_{٢} \cdot ص_{٣} \cdots ص_{ن} +$$

$$ص_{١} \cdot ص'_{٢} \cdot ص_{٣} \cdots ص_{ن} +$$

$$ص_{١} \cdot ص_{٢} \cdot ص'_{٣} \cdots ص_{ن} +$$

$$ص_{١} \cdot ص_{٢} \cdot ص_{٣} \cdots ص'_{ن}$$

و ـ مشتق التابع $ع = تا(س) = ص^{ن}$

في الحالة العامة لاشتقاق التابع $ع = ص_{١} ص_{٢} ص_{٣} \cdots ص_{ن}$

لنفرض أن التوابع ص متساوية أي :

$$ص = ص_{١} = ص_{٢} = ص_{٣} = \cdots = ص_{ن}$$

فتكون مشتقاتها متساوية :

$$ص' = ص'_{١} = ص'_{٢} = ص'_{٣} = \cdots = ص_{ن}$$

فيأخذ التابع ع الشكل :

$$ع = ص^{ن}$$

ومشتقه $ع' = ن\ ص^{ن-1} \cdot ص'$

مثال : $ع = (٢ س^{٣} + ٤ س + ١)^{٥}$

$$ع' = ٥ (٢ س^{٣} + ٤ س + ١)^{٤} (٦ س^{٢} + ٤)$$

وبما أن $س' = ١$ حسب القاعدة الثانية فان :

$$ع = س^{ن}$$

$$ع' = ن\ س^{ن-1}\ س' = ن\ س^{ن-1}$$

مثال :

$$ع = س^{٩}$$

$$ع' = ٩ س^{٨}$$

حالة خاصة :

مشتق التابع : $ع = \sqrt[ن]{ص} = ص^{\frac{١}{ن}}$

$$\text{ع} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{ص}^{\frac{1}{\text{ن}} - 1} \cdot \text{صَ}$$

$$\text{عَ} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{ص}^{\frac{1 - \text{ن}}{\text{ن}}} \cdot \text{صَ}$$

$$\text{عَ} = \frac{1}{\text{ن}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ص}^{1-\text{ن}}}\ \text{صَ}$$

ز ــ مشتق حاصل قسمة تابعين $\text{ع} = \frac{\text{ص}}{\text{ف}}$ يساوي مشتق الصورة في المخرج ناقصا مشتق المخرج في الصورة مقسوما على مربع المخرج •

ليكن التابع $\text{ع} = \frac{\text{ص}}{\text{ف}}$ حيث كـل من ص و ف توابـع للمتحول س • نضرب الطرفين بالوسطين فيكون :

$$\text{ع} \cdot \text{ف} = \text{ص}$$

نأخذ مشتق طرفي المساواة ونطبق قاعدة مشتق جداء تابعين :

$$\text{عَ} \cdot \text{ف} + \text{فَ} \cdot \text{ع} = \text{صَ}$$

$\text{عَ}\,\text{ف} = \text{صَ} - \text{فَ}\,\text{ع}$ نبدل ع بقيمتها

$$ع' \cdot ف = صَ - فَ \frac{ص}{ف}$$ نوحد المخارج

$$ع' ف = \frac{صَ ف - فَ ص}{ف}$$ ، أخيرا

$$ع' = \frac{صَ \cdot ف - فَ \cdot ص}{ف^٢}$$

أي أن مشتق حاصل قسمة تابعين يساوي الى مشتق الصورة بالمخرج ناقصا مشتق المخرج بالصورة مقسوما على مربع المخرج ٠

مثال :

$$ع = \frac{٢ س^٤ + ٣ س}{٦ س^٣ + س^٢}$$

$$ع' = \frac{(٨س^٣+٣)(٦س^٣+س^٢) - (١٨س^٢+٢س)(٢س^٤+٣س)}{(٦ س^٣ + س^٢)^٢}$$

ح ـ مشتق تابع التابع :

اذا كان ص = ها (س) فكل تابع للمتحول ص وليكن ع حيث ع = تا (ص) يسمى بتابع التابع : أي

$$ع = تا [ها (س)]$$

ان مشتق تابع التابع ع بالنسبة للمتحول س ، يساوي جداء مشتقه بالنسبة للمتحول ص في مشتق التابع ص بالنسبة الى س أي :

$$\text{ع}'_{\text{س}} = \text{ع}'_{\text{ص}} \cdot \text{ص}'_{\text{س}}$$

اذا أعطينا المتحول س تزايدا قدره Δ س فيأخذ ص تزايدا قدره Δ ص و ع تزايدا قدره Δ ع .

أي : $(\text{ع} + \Delta\,\text{ع}) = \text{تا}\,(\text{ص} + \Delta\,\text{ص})$

$\Delta\,\text{ع} = \text{تا}\,(\text{ص} + \Delta\,\text{ص}) - \text{ع}$ نبدل ع بقيمتها

$\Delta\,\text{ع} = \text{تا}\,(\text{ص} + \Delta\text{ص}) - \text{تا}\,(\text{ص})$ نقسم على Δ س

ثم نقسم ونضرب بـ Δ ص

$$\frac{\Delta\,\text{ع}}{\Delta\,\text{س}} = \frac{\text{تا}(\text{ص}+\Delta\text{ص}) - \text{تا}(\text{ص})}{\Delta\,\text{ص}} \cdot \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\text{س}}$$

نبدل Δ ص بما تساويه من العلاقة ص = ها (س)

$$\Delta\,\text{ص} = \text{ها}\,(\text{س} + \Delta\,\text{س}) - \text{ها}\,(\text{س})$$

اذن :

$$\frac{\Delta\,\text{ع}}{\Delta\,\text{س}} = \frac{\text{تا}(\text{ص}+\Delta\text{ص}) - \text{تا}(\text{ص})}{\Delta\,\text{ص}} \cdot \frac{\text{ها}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{ها}(\text{س})}{\Delta\,\text{س}}$$

وعندما Δ س ← ٠ فان Δ ص ← ٠ و $\dfrac{\Delta\,\text{ع}}{\Delta\,\text{س}}$ تنتهي

لمشتق ع بالنسبة لـ س و $\frac{\Delta ع}{\Delta ص}$ تنتهي لمشتق ع بالنسبة لـ ص ،

و $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ تنتهي لمشتق ص بالنسبة لـ س :

نها $\frac{\Delta ع}{\Delta س}$ = نها $\frac{ها(ص+\Delta ص) - ها(ص)}{\Delta ص}$ نها $\frac{ها(س+\Delta س) - ها(س)}{\Delta س}$ أي

Δ س ← ٠ $\qquad$ Δ ص ← ٠ $\qquad$ Δ س ← ٠

$$ع'_{س} = ع'_{ص} \cdot ص'_{س}$$

مثال : ليكن التابع ع = ٢ ص^{٢} + ٣ ص + ٢

حيث ص = س^{٥} + ٣ س^{٤}

ان مشتق ع بالنسبة لـ ص هو :

$$ع'_{ص} = ٤ ص + ٣ \cdot$$

ومشتق ص بالنسبة لـ س هو :

$$ص'_{س} = ٥ س^{٤} + ١٢ س^{٣}$$

أما مشتق ع بالنسبة لـ س فهو :

$$ع'_س = ع'_ص \cdot ص'_س$$

$$ع'_س = (٤ ص + ٣)(٥ س^٤ + ١٢ س^٣)$$

ط ـ مشتق التابع اللوغاريتمي ع = لع س :

لايجاد مشتق هذا التابع ، لنعط س تزايدا قدره $\triangle$ س ولنحسب $\triangle$ ع، ثم نوجد النسبة بين هذين التزايدين وننهي أخيرا $\triangle$ س للصفر.

ع = لع س .

(ع + $\triangle$ ع) = لع (س + $\triangle$ س) ننقل ع للطرف الثاني

$\triangle$ ع = لع (س + $\triangle$ س) − ع نبدل ع بقيمتها

$\triangle$ ع = لع (س + $\triangle$س) − لع س وحسب خواص اللوغاريتمات

$\triangle$ ع = لع $\dfrac{س + \triangle س}{س}$ نقسم طرفي المساواة على $\triangle$ س

$\dfrac{\triangle ع}{\triangle س} = \dfrac{لع \dfrac{س + \triangle س}{س}}{\triangle س}$ يمكن كتابة الطرف الثاني من العلاقة

على الشكل : $\dfrac{١}{\text{س}} \cdot \dfrac{\text{لع} \; \dfrac{\text{س} + \Delta\text{س}}{\text{س}}}{\dfrac{\Delta\text{س}}{\text{س}}}$

واستنادا لخواص اللوغاريتم فان :

$$\frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}} = \frac{١}{\text{س}} \; \text{لع} \left(١ + \frac{\Delta\text{س}}{\text{س}} \right)^{\frac{\text{س}}{\Delta\text{س}}}$$

وبانهاء Δ س الى الصفر يكون :

$$\text{نها}_{\Delta\text{س} \to ٠} \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}} = \frac{١}{\text{س}} \; \text{لغ} \; \text{نها}_{\Delta\text{س} \to ٠} \left(١ + \frac{\Delta\text{س}}{\text{س}} \right)^{\frac{\text{س}}{\Delta\text{س}}}$$

ينتهي المقدار $\dfrac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}}$ الى المشتق ، والمقدار $\left(١ + \dfrac{\Delta\text{س}}{\text{س}} \right)^{\frac{\text{س}}{\Delta\text{س}}}$ الى العدد الطبيعي (e) :

$\text{ع}' = \dfrac{١}{\text{س}} \; \text{لع} \; e$. وبما أن لوغاريتم العدد الطبيعي بالاساس

ذاته يساوي الواحد فان $ع' = \frac{1}{س}$ •

واستنادا الى قاعدة مشتق تابع التابع فان :

$$ع = لع\ ص$$

$$ع'_{س} = \frac{ص'}{ص}$$

ي ـ المشتقات المتتالية :

ليكن التابع ع = تا (س)

ان المشتق الاول لهذا التابع والذي نرمز له بـ $ع' = تا'(س)$ هو بدوره تابع جديد لـ س ، فمن الممكن ايجاد مشتقه الذي نسميه بالمشتق الثاني للتابع ع = تا (س) ونرمز له بـ $ع'' = تا''(س)$ • وهذا التابع هو بدوره تابع جديد لـ س ومن الممكن ايجاد مشتقه الذي نسميه المشتق الثالث للتابع ونرمز له بـ $ع''' = تا'''(س)$ وهكذا نستطيع حساب المشتق الرابع والخامس والسادس للتابع الى أن ينعدم التابع المشتق •

مثال :

$$ع = تا(س) = ٣\,س^{٥} + ٤\,س^{٣} + ٢\,س^{٢}$$

$$ع' = تا'(س) = ١٥\,س^{٤} + ١٢\,س^{٢} + ٤\,س$$

$ع'' = تا''(س) = ٦٠ س^٣ + ٢٤ س + ٤$

$ع''' = تا'''(س) = ١٨٠ س^٢ + ٢٤$

$ع^{(٤)} = تا^{(٤)}(س) = ٣٦٠ س$

$ع^{(٥)} = تا^{(٥)}(س) = ٣٦٠$

$ع^{(٦)} = تا^{(٦)}(س) = ٠$ ∴

ك ـ المشتقات الجزئية :

درسنا حتى الآن مشتقات التوابع من الشكل ع = تا(س) حيث يتبع ع لمتحول واحد س • ومن الممكن أن يتبع ع لمتحولين أو أكثر ، ونكتب ذلك على الشكل :

$ع = تا(س ، ص)$

في هذه الحالة ، يمكن ايجاد ما نسميه بالمشتقات الجزئية للتابع وذلك باعطاء المتحول س قيما ثابتة وتحويل ص لوحده ، أو باعطاء ص قيما ثابتة وتحويل س لوحده ، فنحصل في كلتا الحالتين على تابع ذي متحول وحيد •

ويعرف المشتق الجزئي للتابع ع = تا (س) بالنسبة لـ س ونرمز له بـ $ع'_{س}$ بالعلاقة :

$$ع'_{س} = نها \frac{تا(س + \Delta س، ص) - تا(س، ص)}{\Delta س}$$

$\Delta س \leftarrow ٠$ ∴

أما المشتق الجزئي للتابع ع = تا (س) بالنسبة لـ ص ونرمز له بـ $ع'_{ص}$ فيعرف بالعلاقة :

$$ع'_{ص} = \lim_{\Delta ص \to \cdot} \frac{تا(س، ص+\Delta ص) - تا(س، ص)}{\Delta ص}$$

وتحسب المشتقات الجزئية بتطبيق قواعد الاشتقاق العادية مع افتراض جميع المتحولات ثوابتا ماعدا المتحول الذي نشتق بالنسبة له :

مثال :

$$ع = تا(س ، ص) = ٣ س^{٢} ص^{٥} + ٦ س^{٣} ص + ٢ س . ص$$

$$ع'_{س} = ٦ س ص^{٥} + ١٨ س^{٢} ص + ٢ ص .$$

$$ع'_{ص} = ١٥ س^{٢} ص^{٤} + ٦ س^{٣} + ٢ س$$

هذا ويمكن حساب المشتقات الجزئية المتتالية باتباع القواعد المطبقة على المشتقات المتتالية العادية مع اعتبار جميع المتحولات ثوابتا ماعدا المتحول الذي نشتق بالنسبة له ، فاستنادا الى أرقام المثال السابق يكون :

$$ع''_{س.س} = ٦ ص^{٥} + ٣٦ س ص$$

$$ع''_{س.ص} = ٣٠ س ص^{٤} + ١٨ س^{٢} + ٢$$

$$ع''_{ص.س} = ٣٠ س . ص^{٤} + ١٨ س^{٢} + ٢$$

$$ع''_{ص.ص} = ٦٠ س^{٢} ص^{٣}$$ وهكذا .

تطبيقات عمليـــة

أوجد مشتقات التوابع التالية :

$$ع = ٢ س - ٥$$

$$ع = ٥ س^{٢} - ٣ س + ٤$$

$$ع = - ٣ س^{٦} + ٥ س - ٣$$

$$ع = س^{٧}$$

$$ع = \frac{٣}{٥} \sqrt[٥]{س^{٣}}$$

$$ع = ٣ س^{٢} + ٢ س^{٣} + س \sqrt[٣]{س} - \sqrt[٤]{س^{٣}}$$

$$ع = لع \left(س^{٢} + ١ \right)$$

$$ع = لع \left(س^{٢} - ١ \right)$$

$$ع = لع \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}$$

$$ع = \left(س + ٢ \right) \left(س^{٢} - ١ \right)$$

$$ع = \left(٢ س^{٢} + ٣ \right) لع س$$

$$ع = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{لع س}}{\text{س}}$$

$$\text{ع} = \text{س}^{٢}\ \text{لع س}$$

$$\text{ع} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ع} = (٣\,\text{س}^{٢} + ٥\text{س})\,(٤\,\text{س}^{٩} - ٣\,\text{س})$$

$$\text{ع} = \frac{٤\,\text{س}^{٥} + ٨\text{س}^{٣}}{٣\,\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}}$$

$$\text{ع} = (\text{س}^{٢} + ٣)\ \text{لع}\ (\text{س}^{٢} + ٣)$$

★ ★ ★

الفصل العاشر

دراسة تحولات التوابع
ورسم خطوطها البيانية

يقصد بدراسة تحولات التابع اظهار المجالات التي يتزايد فيها التابع أو يتناقص أو يكون ثابتا ، وتتطلب دراسة تحولات تابع ما القيام بالخطوات التالية :

١ ـ تعيين مجموعة تعريف التابع •

٢ ـ تعيين المجالات التي يكون التابع فيها مستمرا •

٣ ـ دراسة اشارة المشتق الاول للتابع وذلك لتحديد مجالات تزايد وتناقص التابع •

٤ ـ تعيين قيم التابع عند حدي كل من مجالات الاستمرار •

٥ ـ دراسة جهة التقعر وتعيين احداثيات نقاط الانعطاف •

٦ ـ تحديد نقاط تقاطع الخط البياني مع محوري الاحداثيات •

٧ ـ تعيين المستقيمات المقاربة ان وجدت وحساب معادلاتها •

وبصورة عملية ، تمر دراسة تحولات التابع بالمراحل التالية :

١ ــ تعيين مجموعة تعريف التابع وذلك باستثناء القيمة التي لا يكون التابع بالنسبة لها معرفا من مجموعة الاعداد الحقيقية ح •

٢ ــ حساب المشتق الاول وايجاد قيم س التي تعدم المشتق لدراسة اشارته •

٣ ــ دراسة القيم والفروع اللانهائية •

٤ ــ تعيين النهايات الحدية •

٥ ــ انشاء جدول التغيرات •

٦ ــ حساب المشتق الثاني •

٧ ــ ايجاد نقاط التقاطع مع محوري الاحداثيات •

٨ ــ رسم الخط البياني للتابع •

هذا وسنتعرض لدراسة التوابع الصحيحة من الدرجة الاولى والثانية والثالثة والتوابع الكسرية التناظرية وغير التناظرية في الابحاث التالية :

البحث الاول : الدراسة العامة للتابع من الدرجة الاولى •

البحث الثاني : الدراسة العامة للتابع من الدرجة الثانية •

البحث الثالث : الدراسة العامة للتابع من الدرجة الثالثة •

البحث الرابع : الدراسة العامة للتابع الكسري المتناظر •

البحث الخامس : دراسة التوابع الكسرية غير المتناظرة •

البحث الاول

الدراسة العامة للتابع من الدرجة الاولى

تمثل المعادلة من الدرجة الاولى مستقيما تتم دراسته باتباع الخطوات التالية :

١ ــ الشكل العام للتابع :

ع = ب س + حـ   حيث ب ≠ ٠

٢ ــ مجموعة تعريف التابع :

التابع صحيح فهو معرف ومستمر على مجموعة الاعداد الحقيقية ح .

٣ ــ المشتق الاول :

عَ = ب

وهنا نفرق بين الحالات التالية :

ب > ٠ ∴ المشتق الاول موجب ، عَ > ٠ ∴ والتابع متزايد .

ب = ٠ ∴ المشتق الاول معدوم ، عَ = ٠ ∴ والتابع ثابت .

ب < ٠ ∴ المشتق الاول سالب ، عَ < ٠ ∴ والتابع متناقص .

٤ ـ القيم اللانهائية :

نفرق بين حالتين :

ب > ٠ : س ← −∞ ، ع ← −∞
س ← +∞ ، ع ← +∞

ب < ٠ : س ← −∞ ، ع ← +∞
س ← +∞ ، ع ← −∞

٥ ـ النهايات الحدية :

ليس للتابع من الدرجة الاولى نهايات حدية لعدم وجود قيم لـ س تعدم المشتق الاول .

٦ ـ جدول التغيرات :

س	−∞		+∞
عَ		+	
ع	−∞	↗	+∞

س	−∞		+∞
عَ		−	
ع	+∞	↘	−∞

٧ ـ المشتق الثاني :

ع" = ٠

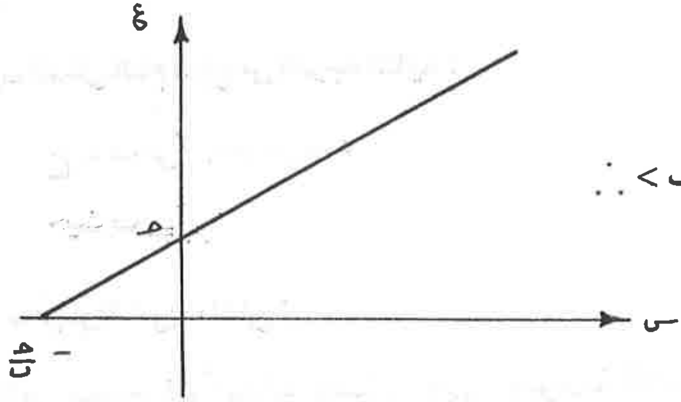
ليس للتابع نقطة انعطاف .

٨ ـ التقاطع مع المحاور :

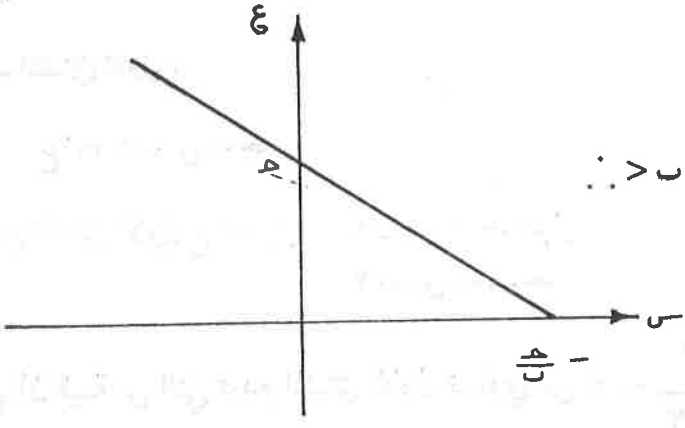
مع محور العينات   س = ∴   ع = حـ

مع محور السينات   ع = ∴   س = − $\frac{حـ}{ب}$

٩ ـ الشكل البياني :



ب > ∴



ب > ∴

البحث الثاني

الدراسة العامة للتابع من الدرجة الثانية

١ ـ الشكل العام للتابع من الدرجة الثانية :

$$ع = ب\,س^{٢} + حـ\,س + د$$

حيث $ب \neq ٠$

٢ ـ مجموعة تعريف التابع :

التابع صحيح فهو معرف ومستمر على مجموعة الاعداد الحقيقة ح •

٣ ـ المشتق الاول :

$$ع' = ٢\,ب\,س + حـ$$

نعدم المشتق الاول $ع' = ٠$ $\quad$ $٢\,ب\,س + حـ = ٠$

$$٢\,ب\,س = -\,حـ$$

أي أن قيمة س التي تعدم المشتق الاول تساوي $س = -\dfrac{حـ}{٢ب}$

أما قيمة ع المقابلة فهي :

$$ع = ب\left(\frac{-ح}{٢ب}\right)^٢ + ح\left(\frac{-ح}{٢ب}\right) + د$$

$$ع = ب\frac{ح^٢}{٤ب^٢} - \frac{ح^٢}{٢ب} + د$$

$$ع = \frac{٤ب د - ح^٢}{٤ب}$$

اذن $\left(س = \frac{-ح}{٢ب} ،\ ع = \frac{٤ب د - ح^٢}{٤ب}\right)$

في دراسة اشارة المشتق نفرق بين حالتين :

ب > ٠

$س < \frac{-ح}{٢ب} \Leftarrow ع' < ٠$ والتابع متناقص

$س > \frac{-ح}{٢ب} \Leftarrow ع' > ٠$ والتابع متزايد

أي أن النقطة $\left(\frac{-ح}{٢ب} ،\ \frac{٤ب د - ح^٢}{٤ب}\right)$ هي نهاية حدية صغرى .

ب > ٠

$$\text{س} > -\frac{\text{ح}}{\text{٢ب}} \Leftarrow \text{ع}' > ٠$$ والتابع متزايد

$$\text{س} < -\frac{\text{ح}}{\text{٢ب}} \Leftarrow \text{ع}' < ٠$$ والتابع متناقص

أي أن النقطة $\left(-\frac{\text{ح}}{\text{٢ب}} ، \frac{\text{٤ب د} - \text{ح}^{٢}}{\text{٤ب}}\right)$ هي نهاية حدية عظمى .

٤ ـ القيم اللانهائية :

اذا كان ب > ٠

$$\text{س} \to -\infty \quad ، \quad \text{ع} \to +\infty$$
$$\text{س} \to +\infty \quad ، \quad \text{ع} \to +\infty$$

أما اذا كان ب < ٠ فان :

$$\text{س} \to -\infty \quad ، \quad \text{ع} \to -\infty$$
$$\text{س} \to +\infty \quad ، \quad \text{ع} \to -\infty$$

٥ ـ جدول التغيرات :

الحالة الاولى ب > ٠

س	$-\infty$		$-\frac{حـ}{ب}$		$+\infty$
عَ		−	٠	+	
ع	$+\infty$	↘	$\frac{٤ ب د - حـ^2}{٤ ب}$	↗	$+\infty$

لنص

الحالة الثانية ب < ٠

س	$-\infty$		$-\frac{حـ}{ب}$		$+\infty$
عَ		+	٠	−	
ع	$-\infty$	↗	$\frac{٤ ب د - حـ^2}{٤ ب}$	↘	$-\infty$

نع

٦ ـ المشتق الثاني :

اذا كان ب > ٠ فان عً > ٠ والتقعر نحو العينات الموجبة.

اذا كان ب < ٠ فان عً < ٠ والتقعر نحو العينات السالبة .

وحيث أنه لا توجد قيمة لـ س تعدم المشتق الثاني فلا يوجد نقطة انعطاف .

٧ ـ التقاطع مع المحاور :

مع محور العينات : س = ٠ ومنه ع = د فالنقطة (٠ ، د) هي نقطة تقاطع التابع مع محور العينات .

التقاطع مع محور السينات ع = ٠ ومنه ب س^{٢} + حـ س + د = ٠

وهي معادلة من الدرجة الثانية تتعلق جذورها بقيمة المميز $\Delta = ح^2 - 4$ ب د ، اذا كان :

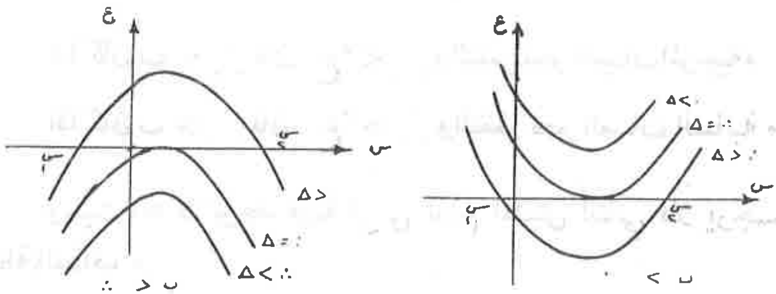
$\Delta > 0$ ∴ للمعادلة جذران $س_1$ ، $س_2$ متمايزان والتابع يقطع محور السينات في نقطتين .

$\Delta = 0$ ∴ للمعادلة جذر مضاعف والتابع يقطع محور السينات في نقطة واحدة .

$\Delta < 0$ ∴ المعادلة مستحيلة الحل والتابع لا يقطع محور السينات.

ويمكن توضيح هذه الحالات بالشكل البياني التالي :

٨ ــ الشكل البياني :



هذا ويمكن ايراد الملاحظات التالية على دراسة التوابع من الدرجة الثانية :

ــ لكل تابع من الدرجة الثانية نهاية حدية واحدة ، وتكون هذه النهاية عظمى اذا كان ب < 0 وصغرى اذا كان ب > 0 .

يتقعر الخط البياني للتابع من الدرجة الثانية لجهة واحدة فقط ، فاذا كان ب > ٠ فالتقعر نحو العينات الموجبة ، واذا كان ب < ٠ فالتقعر نحو العينات السالبة .

ـ ليس للتابع من الدرجة الثانية نقطة انعطاف .

ـ يتناظر الخط البياني للتابع من الدرجة الثانية بالنسبة للمستقيم المار بنهايته الحدية والموازي لمحور العينات .

مثال تطبيقي :

ادرس تحولات التابع ع = س^{٢} + ٣س − ٤ وارسم خطهالبياني

١ ـ التابع صحيح فهو معرف ومستمر على مجموعة الاعداد الحقيقية ح .

٢ ـ المشتق الاول ع َ = ٢ س + ٣

نعدم المشتق الاول ع َ = ٠

٢ س + ٣ = ٠

ومنه س = $-\frac{٣}{٢}$ ، ع = $-\frac{٢٥}{٤}$

عندما س < $-\frac{٣}{٢}$ المشتق الاول ع َ < ٠ والتابع متناقص

س > $-\frac{٣}{٢}$ المشتق الاول ع َ > ٠ والتابع متزايد

س $= - \frac{٣}{٢}$ المشتق الاول عَ = ٠ والتابع يمر بنهاية صغرى

٣ ــ القيم اللانهائية : بما أن ب > ٠ اذن :

س ← $\mp\infty$ ، ع ← $+\infty$.

٤ ــ جدول التغيرات :

س	$-\infty$		$-\frac{٣}{٢}$		$+\infty$
عَ		$-$	٠	$+$	
ع	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{٢٥}{٤}$ نص	$\nearrow$	$+\infty$

٥ ــ المشتق الثاني :

عً = ٢ > ٠ فالتقعر نحو العينات الموجبة .

٦ ــ التقاطع مع المحاور :

مع محور العينات س = ٠ ومنه ع = − ٤

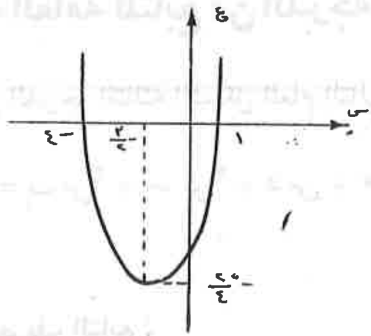
مع محور السينات ع = ٠ ومنه س^{٢} + ٣س − ٤ = ٠

Δ = ٩ − ٤ × ١ × − ٤ = ٢٥

س$_{١}$ = $\frac{-٣-٥}{٢}$ = − ٤

$$س_٢ = \frac{-٣ + ٥}{٢} = ١$$

٧ ــ الشكل البياني :



★ ★ ★

البحث الثالث

الدراسة العامة للتابع من الدرجة الثالثة

يأخذ التابع من الدرجة الثالثة الشكل العام التالي :

$$ع = ب س^{٣} + حـ س^{٢} + د س + هـ$$

حيث $ب \neq ٠$

١ ـ مجموعة تعريف التابع :

التابع صحيح فهو معرف ومستمر على مجموعة الاعداد الحقيقية ح .

٢ ـ المشتق الاول :

$$عَ = ٣ ب س^{٢} + ٢ حـ س + د$$

نعدم المشتق الاول : $عَ = ٠$

ومنه $٣ ب س^{٢} + ٢ حـ س + د = ٠$

تمثل هذه العلاقة معادلة من الدرجة الثانية ، بالاستناد الى قيمة مميزها نفرق بين الحالتين :

$\Delta > ٠$ للتابع نهايتان حديتان عظمى وصغرى توافقان جذور المعادلة .

$\Delta \leqslant ٠$ ليس للتابع نهايات حدية .

٣ ـ القيم اللانهائية :

باعتبار قيمة ب أمثال $س^٣$ نفرق بين حالتين :

ب < ∴ س ← − ∞ ، ع ← − ∞
س ← + ∞ ، ع ← + ∞

ب < ∴ س ← − ∞ ، ع ← + ∞
س ← + ∞ ، ع ← − ∞

٤ ـ جدول التغيرات :

باعتبار قيمة Δ مميز معادلة المشتق الاول و ب أمثال $س^٣$ يمكن التمييز بين الحالات التالية :

الحالة الاولى :

Δ < ∴ نفرق هنا بين حالتين فرعيتين :

ب < ∴

س	− ∞		س١		س٢		+ ∞
ع̄		+	∴	−	∴	+	
ع	− ∞	↗	نع	↘	نص	↗	+ ∞

ب < ∴

س	− ∞		س١		س٢		+ ∞
ع̄		−	∴	+	∴	−	
ع	+ ∞	↘	نص	↗	نع	↘	− ∞

الحالة الثانية :

Δ = ∴

يوجد للمشتق جذر مضاعف س = − حـ/٣ب فتكـون اشـارة المشتق كاشارة ب في المجالين :

[−∞ ، −حـ/٣ب] ∪ [−حـ/٣ب ، +∞]

س	−∞	−حـ/٣ب	+∞
عَ	اشارة ب	∴	اشارة ب

الحالة الثالثة :

Δ > ∴

لا يوجد لمعادلة المشتق الاول جذور حقيقية وتكون اشارته من اشارة ب •

ه ـ المشتق الثاني :

عً = ٦ ب س + ٢ حـ

عً = ∴ ٦ ب س + ٢ حـ = ∴

أي $٦ب س = -٢حـ$

و $س = \frac{-٢حـ}{٦ب} = \frac{-حـ}{٣ب}$

ولمعرفة جهة التقعر نفرق بين حالتين :

ــ اذا كانت ب > ∴ فان :

$س < -\frac{حـ}{٣ب}$ ⇐ $ع'' <$ ∴ والتقعر نحو العينات السالبة

$س > -\frac{حـ}{٣ب}$ ⇐ $ع'' >$ ∴ والتقعر نحو العينات الموجبة

أما اذا كانت ب < ∴ فان :

$س < -\frac{حـ}{٣ب}$ ⇐ $ع'' >$ ∴ والتقعر نحو العينات الموجبة

$س > -\frac{حـ}{٣ب}$ ⇐ $ع'' <$ ∴ والتقعر نحو العينات السالبة

٦ ــ نقطة الانعطاف :

هي النقطة التي تعدم سيناتها المشتق الثاني •

أي $س = \frac{-حـ}{٣ب}$

$$و\ ع = ب\left(-\frac{ح}{٣ب}\right)^٣ + ح\left(\frac{-ح}{٣ب}\right)^٢ + د\left(\frac{-ح}{٣ب}\right) + هـ$$

$$\text{وبالاصلاح يكون}\quad ع = \frac{٢ح^٢}{٢٧ب^٢} - \frac{حد}{٣ب} + هـ$$

٧ ـ التقاطع مع محوري الاحداثيات :

مع محور العينات س = ۰ ، ع = هـ

مع محور السينات ع = ۰ ومنه ب س^٣+حـ س^٢+دس +هـ=۰

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثالثة بتحليلها الى جداء معادلتين من الدرجة الاولى والدرجة الثانية وحسب قيم جذور هذه المعادلة نفرق بين الحالات التالية :

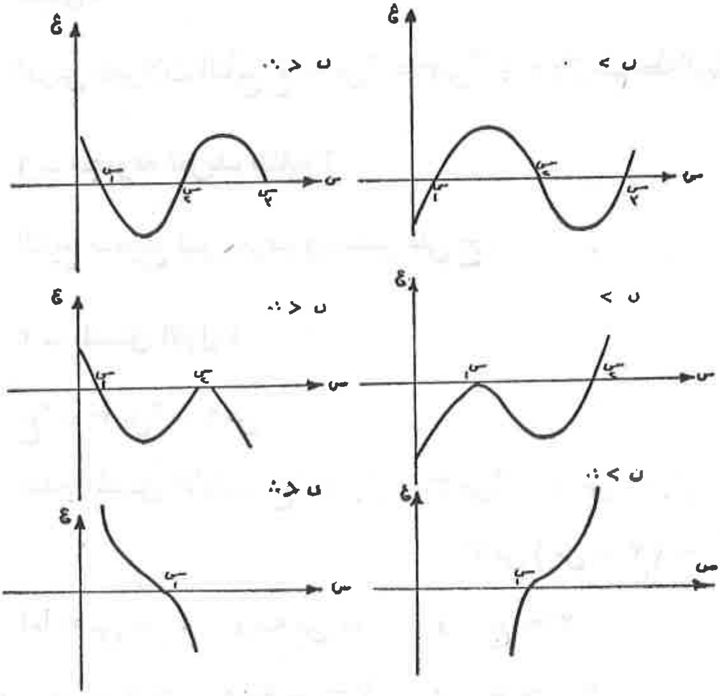
ـ اذا كان للمعادلة ثلاثة جذور حقيقية س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ فان التابع من الدرجة الثالثة يقطع محور السينات في ثلاث نقاط متمايزة .

ـ اذا كان للمعادلة جذران حقيقيان س$_١$ ، س$_٢$ فان التابع من الدرجة الثالثة يقطع محور السينات في نقطة ويمسه في نقطة .

ـ اذا كان للمعادلة جذر حقيقي واحد س$_١$ ، فان التابع من الدرجة الثالثة يقطع محور السينات في نقطة واحدة .

٨ ـ الشكل البياني :

يأخذ التابع من الدرجة الثالثة أحد الاوضاع الموضحة في الشكل التالي حسب قيمة كل من Δ و ب :



هذا ويمكن ابراز الملاحظات التالية في دراسة التابع من الدرجة الثالثة .

ـ يكون للتابع من الدرجة الثالثة نهايتان حديتان أو لا يكون له أية نهايــة .

ـ لكل تابع من الدرجة الثالثة نقطة انعطاف واحدة .

ـ ليس للتابع من الدرجة الثالثة مستقيمات مقاربة لانه تابـع صحيح .

ـ يتناظر الخط البياني للتابع من الدرجة الثالثة بالنسبة لنقطة الانعطاف .

تطبيق :

أدرس تحولات التابع $ع = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢$ وارسم خطه البياني•

١ ـ مجموعة تعريف التابع :

التابع صحيح فهو معرف ومستمر على ح •

٢ ـ المشتق الاول :

$عَ = ٣س^{٢} - ٦س$

نعدم المشتق الاول : $عَ = ٠$ ∴ $٣س^{٢} - ٦س = ٠$ ∴

$٣س(س - ٢) = ٠$ ∴

أما $٣س = ٠$ ∴ ومنه $س = ٠$ ∴ و $ع = ٢$

أو $س - ٢ = ٠$ ∴ ومنه $س = ٢$ و $ع = -٢$

٣ ـ القيم اللانهائية :

$س \leftarrow -\infty$ ، $ع \leftarrow -\infty$

$س \leftarrow +\infty$ ، $ع \leftarrow +\infty$

٤ ـ جدول التغيرات :

س	$-\infty$		٠		٢		$+\infty$
عَ		+	٠	−	٠	+	
ع	$-\infty$	↗	٢ نع	↘	-٢ نص	↗	$+\infty$

٥ ـ المشتق الثاني :

ع″ = ٦ س − ٦

نعدم المشتق الثاني ع″ = ٠ ، ٦ س − ٦ = ٠ ومنه س = ١
و ع = ٠

بما أن ب > ٠ اذن : س < ١ ⇐ ع″ < ٠ والتقعر نحو العينات السالبة

س > ١ ⇐ ع″ > ٠ والتقعر نحو العينات الموجبة

٦ ـ نقطة الانعطاف :

(س = ١ ، ع = ٠)

٧ ـ التقاطع مع المحاور :

مع محور العينات س = ٠ ، ع = ٢

مع محور السينات ع = ٠ ، س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢ = ٠

نحلل الى جداء معادلتين (س − ١) (س^{٢} − ٢ س − ٢) = ٠

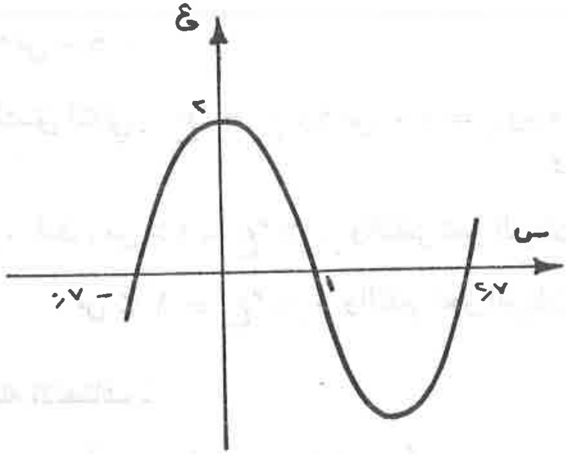
أما س − ١ = ٠ ومنه س = ١

أو س^{٢} − ٢ س − ٢ = ٠ ومنه س = ٢ر٧

أو س = − ٧ر٠

وذلك بحل المعادلة بطريقة المميز •

٨ ـ الشكل البياني :



❊ ❊ ❊

البحث الرابع

الدراسة العامة للتابع الكسري المتناظر

التابع الكسري المتناظر هو نسبة بين تابعين صحيحين من الدرجة الاولى ، ويأخذ هذا التابع الشكل العام التالي :

$$\text{ع} = \frac{\text{ب س} + \text{حـ}}{\text{ب}'\text{س} + \text{حـ}'}$$

حيث : $\text{ب حـ}' - \text{ب}'\text{حـ} \neq 0$.

تتبع في دراسة التوابع الكسرية المراحل نفسها المتبعة في دراسة التوابع الصحيحة .

١ ـ مجموعة تعريف التابع :

يعرف التابع على مجموعة الاعداد الحقيقية باستثناء القيمة التي تعدم المخرج ، أي أن التابع معرف على $\text{ح} - \left\{ -\frac{\text{حـ}'}{\text{ب}'} \right\}$

٢ ـ المشتق الاول :

$$\text{ع}' = \frac{\text{ب}(\text{ب}'\text{س}+\text{حـ}') - \text{ب}'(\text{ب س}+\text{حـ})}{(\text{ب}'\text{س} + \text{حـ}')^2}$$

$$ع' = \frac{ب ب'س + ب حـ' - ب'ب س - ب'حـ}{(ب'س + حـ')^2} = \frac{ب حـ' - ب'حـ}{(ب'س + حـ')^2}$$

المخرج موجب دوما بالنسبة لمجموعة تعريف التابع ، واشارة المشتق من اشارة الصورة نفسها لذلك فعندما يكون :

$ب حـ' - ب'حـ < ٠ \Leftarrow ع' < ٠$ والتابع متناقص تماما .

$ب حـ' - ب'حـ < ٠ \Leftarrow ع' = ٠$ والتابع ثابت .

$ب حـ' - ب'حـ = ٠ \Leftarrow ع' > ٠$ والتابع متزايد تماماً .

٣ ـ الفروع والقيم اللانهائية :

اذا كان $س \to \mp\infty$ فان $ع \to \frac{ب}{ب'}$ فالمستقيم $ع = \frac{ب}{ب'}$ مستقيم مقارب مواز لمحور السينات .

اذا كان $س \to -\frac{حـ'}{ب'}$ فان $ع \to \mp\infty$ ، فالمستقيم $س = -\frac{حـ'}{ب'}$ مستقيم مقارب مواز لمحور العينات .

٤ ـ جدول التغيرات :

نفرق بين حالتين •

ب حَ − بَ ح < ٠

س	− ∞		$-\frac{حَ}{بَ}$		+ ∞
عَ		−	‖	−	
ع	$\frac{ب}{بَ}$	↘	− ∞ ‖ + ∞	↘	$\frac{ب}{بَ}$

ب حَ − بَ ح > ٠

س	− ∞		$-\frac{حَ}{بَ}$		+ ∞
عَ		+	‖	+	
ع	$\frac{ب}{بَ}$	↗	+ ∞ ‖ − ∞	↗	$\frac{ب}{بَ}$

٥ ـ المشتق الثاني :

$$ع'' = \frac{-٢بَ(بَس + حَ)[ب حَ - بَ ح]}{(بَس + حَ)^{٤}}$$

$$ع'' = \frac{-٢بَ(ب حَ - - بَ ح)}{(بَس + حَ)^{٣}} = \frac{-٢بَ(ب حَ - بَ ح)}{\left[بَ(س + \frac{حَ}{بَ})\right]^{٣}}$$

$$ع = \frac{-٢ب'(بح' - ب'ح)}{ب'^{٣}(س + \frac{ح'}{ب'})^{٣}} = \frac{-٢(بح' - ب'ح)}{ب'^{٣}(س + \frac{ح'}{ب'})^{٣}}$$

نميز هنا بين حالتين في دراسة اشارة المشتق الثاني •

ب ح' − ب' ح < ∴

س < − ح'/ب' ⇐ ع'' < ∴ والتقعر نحو العينات السالبة

س > − ح'/ب' ⇐ ع'' > ∴ والتقعر نحو العينات الموجبة

ب ح' − ب' ح > ∴

س < − ح'/ب' ⇐ ع'' > ∴ والتقعر نحو العينات الموجبة

س > − ح'/ب' ⇐ ع'' < ∴ والتقعر نحو العينات السالبة

٦ ــ التقاطع مع المحاور :

التقاطع مع محــور العينــات : س = ٠ ⇐ ع = ح/ح'

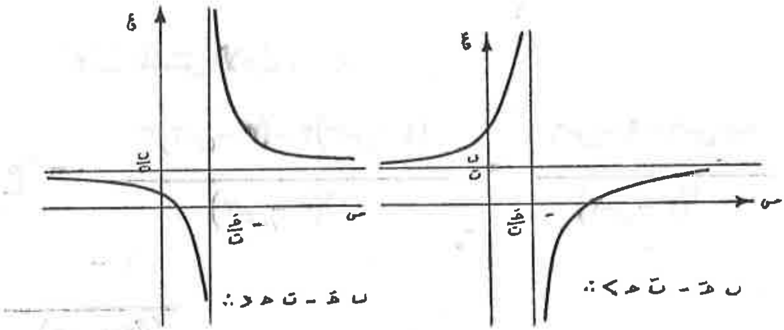
فالنقطة (٠ ، $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}}$) هي نقطة تقاطع مع محور العينات .

التقاطع مع محور السينات ع = ٠ ⇐ ب س + ح = ٠

وس = − $\frac{\text{ح}}{\text{ب}}$ والنقطة (− $\frac{\text{ح}}{\text{ب}}$ ، ٠) تقاطع مع محور السينات .

٧ ـ الرسم البياني :

ويأخذ أحد الشكلين التاليين :



هذا ويمكن ايراد الملاحظات التالية المتعلقة بدراسة التوابع الكسرية المتناظرة :

١ ـ لا يوجد للتابع الكسري المتناظر أية نهاية حدية .

٢ ـ لا يوجد للتابع الكسري المتناظر أية نقطة انعطاف .

٣ ـ يتناظر الخط البياني للتابع الكسري المتناظر بالنسبة لنقطة تقاطع المستقيمين المقاربين .

٤ ــ للخط البياني للتابع الكسري المتناظر فرعان واقعان بجهتين مختلفتين بالنسبة لكل من مستقيميه المقاربين ويكون هذان الفرعان في الربعين الثاني والرابع اذا كان التابع متزايدا وفي الربعين الاول والثالث اذا كان التابع متناقصا •

مثال تطبيقي : ادرس تغيرات التابع $ع = \frac{٣ س - ٤}{٢س - ٣}$ وارسم خطه البياني •

١ ــ مجموعة تعريف التابع $ح - \{ \frac{٣}{٢} \}$

٢ ــ المشتق الاول :

$$ع' = \frac{٣(٢س-٣)-٢(٣س-٤)}{(٢س-٣)^٢} = \frac{٦س-٩-٦س+٨}{(٢س-٣)^٢} =$$

$$\frac{-١}{(٢س-٣)^٢}$$

$ع' < ٠$ ∴ فالتابع متناقص تماما •

٣ ــ الفروع والقيم اللانهائية :

$س \leftarrow \mp \infty$ ، $ع \leftarrow \frac{٣}{٢}$

اذن المستقيم $ع = \frac{٣}{٢}$ مستقيم مقارب مواز لمحور السينات •

$س \leftarrow \frac{٣}{٢}$ ، $ع \leftarrow \mp\infty$

اذن المستقيم $س = \frac{٣}{٢}$ مستقيم مقارب مواز لمحور العينات.

٤ ــ جدول التغيرات

س	$-\infty$		$\frac{٣}{٢}$		$+\infty$
$عَ$		$-$	‖	$-$	
ع	$\frac{٣}{٢}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{٣}{٢}$

٥ ــ المشتق الثاني :

$$ع^{٢} = \frac{٢\times٢(٢س-٣)}{(٢س-٣)^{٤}} = \frac{٤}{(٢س-٣)^{٣}}$$

$س < \frac{٣}{٢}$ $\Leftarrow$ $ع'' <$ ∴ والتقعر نحو العينات السالبة .

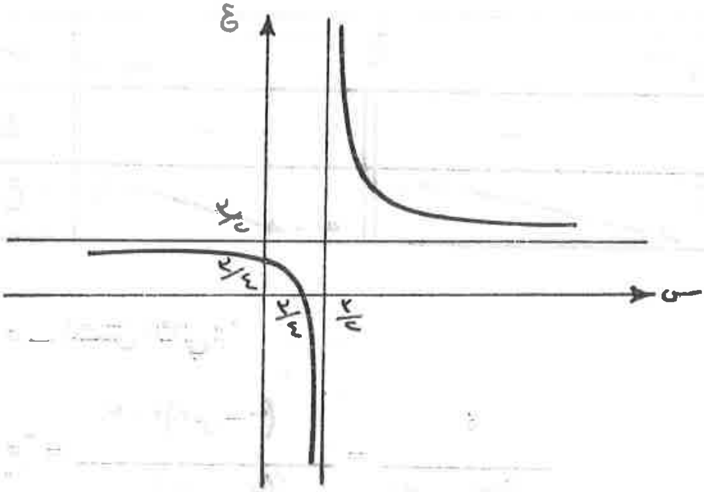
$س > \frac{٣}{٢}$ $\Leftarrow$ $ع'' >$ ∴ والتقعر نحو العينات الموجبة .

٦ ـ التقاطع مع المحاور :

مع العينات س = ٠ ، ع = $\frac{٤}{٣}$

مع السينات ع = ٠ ، س = $\frac{٤}{٣}$

٧ ـ الشكل البياني :



البحث الخامس

دراسة التوابع الكسرية غير المتناظرة

لا يوجد للتوابع الكسرية غير المتناظرة شكل عام محدد ومع ذلك فاننا نتبع في دراستها الخطوات نفسها المتبعة في دراسة التوابع الكسرية المتناظرة والصحيحة ، ونوضح هنا بشكل خاص كيفية ايجاد المستقيمات المقاربة .

لدراسة الفروع اللانهائية والخطوط المقاربة نفرق بين حالتين :

الحالة الاولى : ينتهي فيها أحد المتغيرين س أو ع الى اللانهاية عندما ينتهي المتغير الآخر الى قيمة محددة :

س ← ب عندما ع ← ∓∞ المستقيم س = ب هو مستقيم مقارب مواز لمحور العينات .

س ← ∓∞ عندما ع ← حـ للمستقيم ع = حـ مستقيم مقارب لمحور السينات .

الحالة الثانية : ينتهي فيها كلا المتغيرين س و ع الى اللانهائية :

س ← ∓∞ عندما ع ← ∓∞

يمكن ايجاد المستقيمات المقاربة باتباع الخطوات التالية :

نبحث عن نهاية المقدار $\frac{ع}{س}$ عندما س ← ∓ ∞ وهنا نميز بين الحالات التاليـــة :

آ ــ $\frac{ع}{س}$ ← ٠ عندما س ← ∓ ∞

يكون للمنحنى فرع تكافؤي مستقيمة المقارب محور السينات •

ب ــ $\frac{ع}{س}$ ← ∓ ∞ عندما س ← ∓ ∞

يكون للمنحنى فرع تكافؤي مستقيمه المقارب محور العينات •

حـ ــ $\frac{ع}{س}$ ← م عندما س ← ∓ ∞

وهنا نفرق بين حالتين :

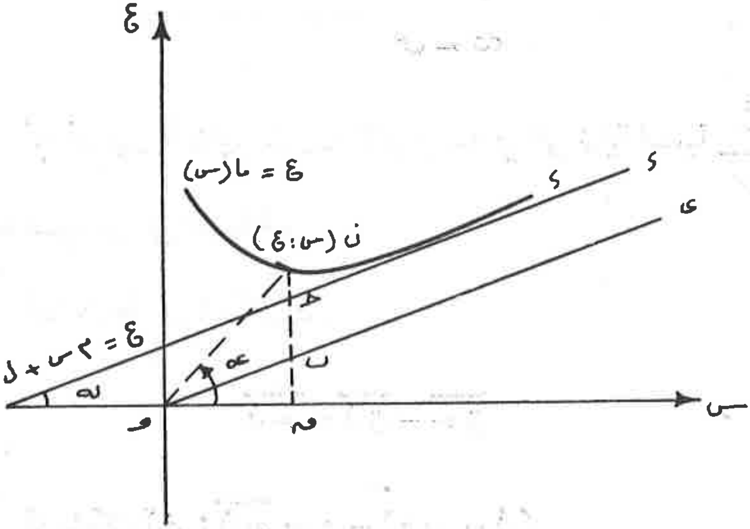
(ع ــ م س) ← ∞ للتابع فرع تكافؤي ذو مستقيم مقارب ع=م س
(ع ــ م س) ← ل للتابع مستقيم مقارب مائل معادلته :

ع = م س + ل

هذا ويعتمد ايجاد معادلة المستقيم المقارب المائل على التحليل التالي :

ليكن المستقيم المائل (د) المقارب للخط البياني ع = تا (س)

فتكون معادلة المستقيم المقارب من الشكل ع = م س + ل حيث م ميل المستقيم أو ظل الزاوية يه التي يصنعها هذا المستقيم مع محور السينات (م = ظل يه) و (ل) نقطة تقاطع المستقيم المقارب مع محور العينات •



لنرسم من مبدأ الاحداثيات المستقيم (ي) الموازي للمستقيم (د) ولنأخذ نقطة ن (س ، ع) من نقاط المنحنى ع = تا (س) • لتكن الزاوية عه التي يصنعها المستقيم ن و مع محور السينات • نلاحظ بوضوح أنه عندما تنتهي النقطة ن على الخط البياني ع = تا (س) بلا تناه فان الزاوية عه تنتهي الى الزاوية يه أي أن :

عه ← يه

عندما س ← ∞

وبالتالي فان ظل يه = ظل عه = نها $\frac{ع}{س}$

$س \leftarrow \infty \quad س \leftarrow \infty$

وبما أن م = ظل يه فيكون : م = نها $\frac{ع}{س}$

$س \leftarrow \infty$

أي أن ميل المستقيم المقارب المائل م يساوي الى نهاية النسبة $\frac{ع}{س}$ عندما تنتهي س الى اللانهاية •

كما نلاحظ من الشكل أن :

$\overline{ن حـ} = \overline{ن ق} - \overline{حـ ق}$

أو بشكل آخر : $\overline{ن حـ} = ع - (م س + ل)$

ولكن نهاية : $\overline{ن حـ}$ تساوي الصفر عندما تبتعد النقطة (ن) على الخط البياني بلا تناه •

نها $\overline{ن حـ}$ = نها [ع - (م س + ل)]

$س \leftarrow \infty \quad س \leftarrow \infty$

أي نها [ع - م س - ل] = ٠

$س \leftarrow \infty$

وبما أن ل عدد ثابت فان : $\lim_{س \to \infty} (ع - م س) = ل$

أي أن تقاطع المستقيم المقارب مع محور العينات يساوي الى نهاية الفرق (ع - م س) عندما تنتهي س الى اللانهاية •

أما اذا ابتعدت (ن) عن الخط البياني الى الجهة السالبة لمحور العينات فعندها تنتهي س ← − ∞ في تحديد كل من القيمتين م ، ل •

تطبيق :

أوجد معادلة المستقيم المقارب المائل للتابع :

$$ع = \frac{٢ س^٣ - ٣س + ٤}{٣س^٢ + ٢س}$$

لايجاد ميل المستقيم المقارب نبحث عن نهاية النسبة :

$$\lim_{س \to \mp\infty} \frac{ع}{س}$$

$$\lim_{س \to \mp\infty} \frac{ع}{س} = \lim_{س \to \mp\infty} \frac{٢ س^٣ - ٣س + ٤}{٣ س^٣ + ٢ س^٢} = \frac{٢}{٣}$$

أي $م = \frac{٢}{٣}$

ولايجاد تقاطع المستقيم المقارب مع محور العينات نبحث عن نهاية المقـدار :

$$\underset{س \leftarrow \mp \infty}{\text{نها}} (ع - م\,س) = \underset{س \leftarrow \mp \infty}{\text{نها}} \left(\frac{٢\,س^{٣} - ٣\,س + ٤}{٣\,س^{٢} + ٢\,س} - \frac{٢}{٣}\,س \right)$$

$$= \underset{س \leftarrow \mp \infty}{\text{نها}} \frac{٦\,س^{٣} - ٩\,س + ١٢ - ٦\,س^{٣} - ٤\,س^{٢}}{٣\,(٣\,س^{٢} + ٢\,س)}$$

$$= \underset{س \leftarrow \mp \infty}{\text{نها}} \frac{-٤\,س^{٢} - ٩\,س + ١٢}{٩\,س^{٢} + ٦\,س}$$

$$= - \frac{٤}{٩}$$

وهكذا فان معادلة المستقيم المقارب المائل هي :

$$ع = \frac{٢}{٣}\,س - \frac{٤}{٩}$$

مثال تطبيقي :

ادرس تحولات التابع $ع = \dfrac{س^٢}{س + ١}$ وارسم خطه البياني

١ ــ مجموعة تعريف التابع : $ح - \{ - ١ \}$

٢ ــ المشتق الاول : $ع' = \dfrac{٢ س (س + ١) - س^٢}{(س + ١)^٢} =$

$$= \dfrac{٢ س^٢ + ٢س - س^٢}{(س + ١)^٢} =$$

$$= \dfrac{س^٢ + ٢ س}{(س + ١)^٢}$$

اشارة المشتق الاول من اشارة الصورة لان المخرج موجب دوما:

$$ع' = ٠ \Leftarrow س^٢ + ٢ س = ٠$$

$$س (س + ٢) = ٠$$

ومنه اما : $س = ٠$

أو $س + ٢ = ٠$ أو $س = - ٢$

وبذلك يكون جدول تغيرات المشتق :

س	$-\infty$		-٢		$\therefore$		$+\infty$
عَ		$+$	$\therefore$	$-$	$\therefore$	$+$	

٣ ــ الفروع والقيم اللانهائية :

عندما $س \leftarrow \mp\infty$ فان $س + ١ \neq س$

$$و\ ع = \frac{س^{٢}}{س} = س$$

اذن $س \leftarrow +\infty$ ، $ع \leftarrow +\infty$

$س \leftarrow -\infty$ ، $ع \leftarrow -\infty$

نحسب الان نهاية النسبة $\frac{ع}{س}$ عندما $س \leftarrow \mp\infty$

$$\frac{ع}{س} = \frac{س^{٢}}{س(س+١)} = \frac{س^{٢}}{س^{٢}+س}$$

$$\lim_{س \leftarrow \mp\infty} \frac{ع}{س} = ١$$

نحسب الآن نهاية المقدار $(ع - م\ س)$ عندما $س \leftarrow \mp\infty$:

$$ع - م\,س = \frac{س^{٢}}{س + ١} - س = \frac{س^{٢} - س^{٢} - س}{س + ١} = \frac{-س}{س+١}$$

$$\lim_{س \to \mp\infty} (ع - م\,س) = \lim_{س \to \mp\infty} \frac{-س}{س + ١} = -١$$

اذن هناك مستقيم مقارب مائل معادلته $ع = س - ١$

أما عندما $س \leftarrow -١$ فان $ع \leftarrow \mp\infty$

فالمستقيم $س = -١$ مقارب مواز لمحور العينات

٤ ــ النهايات الحدية :

$س = -٢ \Leftarrow ع = \frac{٤}{-١} = -٤$ النقطة $(-٢ ، -٤)$

نهايــة عظمى

$س = ∴ \Leftarrow ع = ∴$ النقطة $(∴ ، ∴)$ نهاية صغرى .

٥ ــ جدول التغيرات :

س	$-\infty$		-٢		-١ ‖ -١		∴		$+\infty$
$ع'$		+	∴	−	‖	−	∴	+	
ع	$-\infty$	↖	-٤ نع	↙	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↙	∴ نص	↖	$+\infty$

٦ ـ المشتق الثاني :

$$ع'' = \frac{(٢س + ٢)(س + ١)^٢ - ٢(س + ١)(س^٢ + ٢س)}{(س + ١)^٤}$$

$$ع'' = \frac{٢}{(س+١)^٣}$$

س < −١ ⇐ ع'' < ٠ التقعر نحو العينات السالبة

س > −١ ⇐ ع'' > ٠ التقعر نحو العينات الموجبة

٧ ـ التقاطع مع المحاور :

مع العينات س = ٠ ، ع = ٠

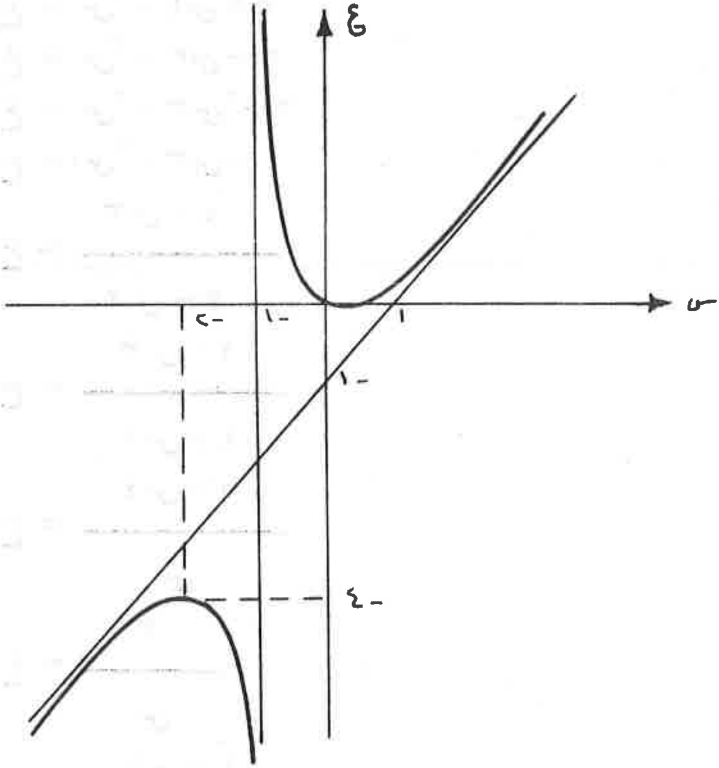
مع السينات ع = ٠ ، س = ٠

٨ ـ الرسم البياني :

لنرسم المستقيم المقارب المائل ع = س − ١

س = ٠ ⇐ ع = −١

ع = ٠ ⇐ س = ١



تطبيقات عمليــة

ادرس تحولات التوابع التالية :

ع = ٢س + ٤

ع = − س + ٣

ع = س^{٢} − ٤ س − ٥

ع = س^{٢} − ٣ س + ٢

ع = − س^{٢} − س + ٢

$$\text{ع} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣$$

$$\text{ع} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ٣$$

$$\text{ع} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٢$$

$$\text{ع} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} - ٤$$

$$\text{ع} = \frac{٣\text{س} - ٤}{٢\text{س} - ٣}$$

$$\text{ع} = \frac{٣\text{س} + ١}{٢\text{س} + ٤}$$

$$\text{ع} = \frac{٤\text{س} - ٥}{\text{س}}$$

$$\text{ع} = \frac{٣}{\text{س}}$$

$$\text{ع} = \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}}$$

$$\text{ع} = \frac{٣ + \text{س}}{١ - ٢\text{س}}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} + ١}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}{٢\text{س} + ٥}$$

الفصل الحادي عشر

التفاضـــــل

تطبق قواعد التفاضل في بعض الابحاث الاقتصاديـة لايجـاد التغيرات في تابع فيما اذا عرفنا مشتق التابع وتغيرات المتحول • بعـد تعريف التفاضل وتمثيله هندسيا سنعمد الى دراسـة أهـم خواص التفاضل ثم سننهي البحث بدراسة التفاضل الكلي وبذلك سيشمل هذا البحث النقاط الآتية :

أولا ــ تعريف التفاضـــل •

ثانيا ــ المعنى الهندسي للتفاضل •

ثالثا ــ خواص التفاضل •

رابعا ــ التفاضل الكلي •

أولا ــ تعريف التفاضل :

ليكن التابع ع = تا (س) المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق على (ح) ، لنعط س تزايدا اختياريا △ س فيأخذ التابع تزايدا نرمز اليه بـ △ ع ، ويكون :

$$\triangle \text{ع} = \text{تا} (\text{س} + \triangle \text{س}) - \text{تا} (\text{س})$$

ولقد رأينا في تعريف المشتقات أن نهايــة النسبة $\dfrac{\triangle \text{ع}}{\triangle \text{س}} = \dfrac{\text{تا}(\text{س}+\triangle\text{س})-\text{تا}(\text{س})}{\triangle \text{س}}$ هي مشتق التابع عندما يســعى △ س الــى الصفر ، ولكن هذه العلاقة لاتعني أن النسبة $\dfrac{\triangle \text{ع}}{\triangle \text{س}}$ تساوي المشتق ولكنها تقترب من عَ كلما اقترب △ س من الصفر ، لذلك يمكن كتابة النسبة $\dfrac{\triangle \text{ع}}{\triangle \text{س}}$ على النحو التالي :

$$\frac{\triangle \text{ع}}{\triangle \text{س}} = \text{ع}' + \text{د}$$

حيث د متناه في الصغر يسعى للصفر عندما △ س يسعى للصفر ، ومن العلاقة السابقة نكتب : $\triangle \text{ع} = \text{ع}' \cdot \triangle \text{س} + \text{د} \cdot \triangle \text{س}$

نسمي المقدار عَ • △ س بتفاضل التابع ع ونرمز له بـ تفا ع ، أي :

$$\text{تفا ع} = \text{ع}' \cdot \triangle \text{س}$$

وبتعويض ذلك في علاقة تزايد التابع Δ ع ينتج :

$$\Delta \text{ع} = \text{تفا ع} + \text{د} \cdot \Delta \text{س}$$

وبصورة خاصة ، اذا كان س = ع فان :

$$\text{تفا ع} = \text{ع}' \cdot \Delta \text{س}$$

وبما أن ع´ = ١ ، فان تفا ع = Δ س

ولما كان س = ع ، فان تفا س = تفا ع

ومنه فان تفا س = Δ س

أي أن تفاضل س يساوي تزايد س ، وعلى هذا فيعرف تفاضل التابع بالعلاقة : تفا ع = ع´ • تفا س

أي أن تفاضل تابع ما يساوي جداء مشتقه بتفاضل المتحول ومنه :

$$\text{ع}' = \text{تا}'(\text{س}) = \frac{\text{تفا ع}}{\text{تفا س}}$$

أي أن مشتق تابع ما يساوي الى حاصل قسمة تفاضل هذا التابع على تفاضل المتحول :

مثال عددي :

أوجد الفرق بين Δ ع تزايد التابع التالي وتفاضله تفا ع عندما $\text{س}_1 = ٢$ و $\text{س}_2 = \text{س} + \Delta \text{س} = ٢٫٠١$

التابع : $ع = ٤ س^٢ + ٣ س$

نحسب $ع_١ = ٤ (٢)^٢ + ٣ (٢) = ١٦ + ٦ = ٢٢$

نحسب $ع_٢ = ٤ (٢٫٠١)^٢ + ٣ (٢٫٠١) = ٢٢٫١٩٠٤$

تزايد التابع $\Delta ع = ع_٢ - ع_١ = ٢٢٫١٩٠٤ - ٢٢ = ٠٫١٩٠٤$

أما تفاضل التابع : $تفا ع = ع' \cdot تفا س$

$تفا ع = (٨ س + ٣) تفا س$

$تفا ع = (٨ \times ٢ + ٣) \times ٠٫٠١$

$تفا ع = ١٩ \times ٠٫٠١ = ٠٫١٩$

أما الفرق بين تزايد التابع وتفاضله فهو :

$\Delta ع - تفا ع = ٠٫١٩٠٤ - ٠٫١٩ = ٠٫٠٠٠٤$

ونلاحظ أن الفرق ضئيل ويتناهى للصفر عندما Δ س يسعى للصفر .

ثانيا ـ المعنى الهندسي للتفاضل :

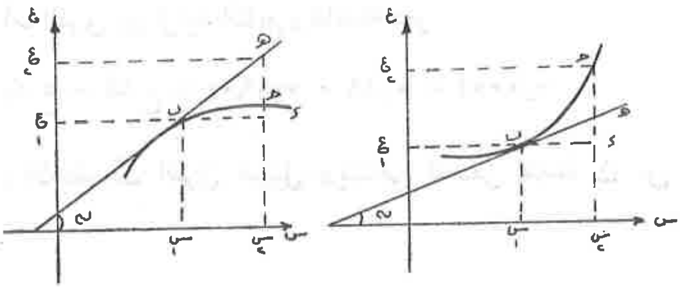
ليكن التابع ع = تا (س) المعرف والمستمر على (ح) ، لنأخذ على منحنى التابع النقطتين ب ($س_١$ ، $ع_١$) ، حـ ($س_٢$ ، $ع_٢$) حيث $\Delta س = س_٢ - س_١$ و $\Delta ع = ع_٢ - ع_١$ ثم لنرسم مماسا للمنحني في النقطة ب ، ان ظل الزاوية (ه) يساوي الى ميل المماس في النقطة (ب) ، ويساوي كذلك الى المشتق الاول في هذه النقطة ، أي :

$$ع' = ظل يه = \frac{د هـ}{د ب}$$

$$ع = \frac{د هـ}{\triangle س}$$

$$د هـ = ع' \cdot \triangle س$$

وحيث أن الجداء ع'•△س يساوي تعريفا الى تفاضل التابع تفا ع فان (د هـ) يمثل هذا التفاضل ، ويبدو واضحا أن الفرق بين تفاضل التابع تفا ع = د هـ وتزايده △ ع = د حـ يتمثل بالفرق حـ هـ ، ومعنى ذلك أن تفاضل التابع تفا ع هو الفرق بين ترتيبي نقطتين من المماس فصلاهما (س و س + △ س) حيث س فاصلة نقطة التماس •



هذا وتجب الاشارة الى أن القيمة المطلقة لتزايد التابع △ ع قد تكون أكبر من القيمة المطلقة لتفاضله تفا ع (الشكل الاول) كما أنها قد تكون أصغر منه (الشكل الثاني) •

ثالثا : خواص التفاضل :

تنتج خواص التفاضل مباشرة من خواص الاشتقاق بسبب تعريف التفاضل على أنه جداء المشتق في تفاضل المتحول وسنورد فيما يلي الخواص التالية :

١ ــ تفاضل مجموع عدد من التوابع يساوي مجموع تفاضلات هذه التوابع :

$$ع = ص + ض + ط$$

$$تفا\ ع = تفا\ ص + تفا\ ض + تفا\ ط$$

٢ ــ تفاضل جداء عدد من التوابع يساوي الى مجموع جداءات تفاضل أحد التوابع مضروبا ببقية التوابع :

$$ع = ص \cdot ض \cdot ط$$

$$تفا\ ع = ض \cdot ط\ تفا\ ص + ص \cdot ط\ تفا\ ض + ص \cdot ض\ تفا\ ط$$

٣ ــ تفاضل حاصل قسمة تابعين يساوي الى تفاضل الصــورة بالمخرج ناقصا تفاضل المخرج بالصورة على مربع المخرج :

$$ع = \frac{ص}{ط}$$

$$تفا\ ع = \frac{ط \cdot تفا\ ص - ص\ تفا\ ط}{ط^{٢}}$$

رابعا ــ التفاضل الكلي :

يمكن تطبيق مفهوم التفاضل على التوابع التي تحتوي أكثر من متغير مستقل واحد ، ليكن التابع ع = تا (س ، ص) ، ان مجموع التغيرات في المتغير ع الناتجة عن تغيرات متناهية في الصغر في كل من المتغيرين س و ص يعطى بالعلاقة التالية :

$$\text{تفا ع} = \text{ع}'_{\text{س}}\ \text{تفا س} + \text{ع}'_{\text{ص}}\ \text{تفا ص}$$

وهذا ما نسميه بالتفاضل الكلي للتابع • حيث تمثل $\text{ع}'_{\text{س}}$ المشتق الجزئي للتابع ع بالنسبة لـ س ، و $\text{ع}'_{\text{ص}}$ المشتق الجزئي للتابع ع بالنسبة لـ ص •

ونلاحظ بصورة خاصة من تعريف التفاضل الكلي أنه اذا تغير س بينما بقي ص ثابتا أي تفا ص = ٠ فان التفاضل الكلي سيقتصر على الحد الاول تفا ع = $\text{ع}'_{\text{س}}$ تفا س الذي يقيس مقدار التغير في ع الناتج عن تغير متناه في الصغر في س بينما يبقى ص ثابتا • وبصورة مشابهة اذا تغير ص بينما بقي س ثابتا فان تفا س = ٠ والتفاضل الكلي للتابع سيقتصر على الحد الثاني : تفا ع = $\text{ع}'_{\text{ص}}$ تفا ص الذي يقيس مقدار التغير في ع الناتج عن تغير متناه في الصغر في ص بينما يبقى س ثابتا •

وعلى هذا فان التغير تفا ع التفاضل الكلي يمثل مجموع

التغيرات في ع الناتجة عن تغيرات آنية في كل من المتغيرين س و ص لذلك يسمى التغير الناتج بالتفاضل الكلي .

ويمكن تعميم العلاقة السابقة عندما يأخذ التابع الشكل العام التالي :

$$ع = تا (س_١ ، س_٢ ، ... س_ن)$$

$$تفا ع = عَ_{س_١} تفا س_١ + عَ_{س_٢} تفا س_٢ + ... + عَ_{س_ن} تفا س_ن$$

مثال : ان التفاضل الكلي للتابع $ع = ٢ س^٢ ص + ٣ س^٣ ص^٥$ هـو :

$$تفا ع = (٤ س ص + ٩ س^٢ ص^٥) تفا س + (٢ س^٢ + ١٥ س^٣ ص^٤) تفا ص$$

تطبيقات عمليـــة

١ ــ أوجد تفاضلات التوابع التالية :

$$ع = ٢ س^٣ + ٣ س + ٥$$

$$ع = ٥ س^٢ + ٨ س - ١$$

$$ع = ٦ س^٧ + ٤ س^٣ + ٥ س$$

$$ع = ٢ س^٢ + ٤ س - ٨$$

٢ ــ اذا علمت أن مرونة التابع ع بالنسبة لـ س معرفة بالعلاقة :

$$م = \frac{تفا\ ع}{تفا\ س} \cdot \frac{س}{ع}$$ فأوجد مرونات التوابع التالية :

$ع = س^{٢}$

$ع = ٤\ س^{٧}$

$$ع = \frac{٢}{س^{٢}}$$

لع ع = ب لع س + حـ

ع = ب س + حـ

٣ ــ أوجد التفاضل الكلي للتوابع التالية :

$ع = ٢\ س\ ص^{٢} + ٣\ س^{٢}\ ص + ٥$

$ع = س^{٣}\ ص - ٢\ س\ ص^{٥} + ٣\ س$

$ع = ٤\ س^{٢}\ ص^{٢} + ٥\ س^{٣}\ ص^{٣} - ص$

$ع = س^{٣} + ص^{٣} - ٢\ س\ ص + ٤$

$ع = ٣\ س^{٤}\ ص + ٢\ س^{٣}\ ص^{٢} + ٥س + ٤\ س + ٤\ ص - ٨$

الفصل الثاني عشر

المصفوفات والمحددات

تشكل دراسة المصفوفات أهم الموضوعات التي يهتم الحساب الخطي بمعالجتها ، ويعرف الحساب الخطي بأنه كل حساب يتم اعتمادا على عمليتي الجمع والضرب .

وللمصفوفات تطبيقات واسعة في الابحاث الاقتصادية والاحصائية والديمغرافية ، فهي تستخدم في نماذج المدخلات والمخرجات ، وفي النماذج التوازنية الساكنة والحركية ، وفي دراسة الارتباط بين المتغيرات، وفي المصفوفات التي تصف حالة وحركة السكان ، كما يمكن استعمال المصفوفات بشكل عام لايجاد حلول المعادلات الآنية التي تأخذ شكلا مصفوفيا .

سنتناول في هذا الفصل الموضوعات التالية :

البحث الاول : الاشعة وعملياتها .

البحث الثاني : المصفوفات وعملياتها .

البحث الثالث : حالات مصفوفية خاصة .

البحث الرابع : الحل المصفوفي لجملة معادلات خطية .

البحث الاول

الاشعة وعملياتهـا

سنقوم في هذا الفصل بتعريف الاشعة وأنواعهـا ثم سنتناول بالتفصيل العمليات على الاشعة ، وتشمل هذه العمليات الجمع والضرب والتوافقية الخطية وتدوير الاشعة ، ثم سندرس الاسـتقلال الخطي للاشعة . وبذلك يضم هذا البحث الفقرات التالية :

أولا : تعريف الاشعة وأنواعها .

ثانيا : العمليات على الاشعة .

ثالثا : الاستقلال الخطي للاشعة .

أولا : تعريف الاشعة وانواعها :

يعرف الشعاع بأنه جدول يحتوي على عدد منته من الاعداد تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية ، ترتب عناصر الشعاع داخـل الجدول دون أن تفصل بينها فواصل أو نقاط .

يمكن التمييز بين نوعين من الاشعة :

١ ـ الشعاع الافقي : ترتب العناصر في سطر واحد وعدة أعمدة ، فالشعاع :

$$\left[\text{س}_{\text{١ن}} \quad \cdots \quad \text{س}_{\text{١و}} \quad \cdots \quad \text{س}_{\text{٢١}} \quad \text{س}_{\text{١١}} \right] = \text{س}_{(\text{١ ، ن})}$$

يتألف من ن عنصر مرتبة في سطر واحد ، يمثل القوس (١ ، ن) ترتيب الشعاع الافقي فيدل العدد (١) على عدد الاسطر ، والعدد (ن) على عدد الاعمدة ، مثال :

$$\left[\text{٤} \quad \text{١}- \quad \therefore \quad \text{٣} \quad \text{٢} \right] = \text{س}_{(\text{١ ، ٥})}$$

٢ ـ الشعاع العمودي : ترتب العناصر في عمود واحد وعـدة أسطر ، فالشعاع :

$$\text{ع}_{(\text{م ، ١})} = \begin{bmatrix} \text{ع}_{\text{١١}} \\ \text{ع}_{\text{١٢}} \\ \vdots \\ \text{ع}_{\text{١ر}} \\ \vdots \\ \text{ع}_{\text{١م}} \end{bmatrix}$$

يتألف من م عنصر مرتبة في م سطر وعمود واحد ، ويدل العدد (م) على عدد الاسطر والعدد (١) على عدد الاعمدة ، مثال :

$$\text{ع}_{(\text{٣ ، ١})} = \begin{bmatrix} \text{٦} \\ \text{٢} \\ \text{١}- \end{bmatrix}$$

هذا ويمكن اعتبار أي عدد (د) منتم الى مجموعة الاعداد الحقيقية بمثابة شعاع أفقي أو عمودي مؤلف من سطر واحد وعمود واحد ، ويطلق على هذا العدد ، العدد الوحيد حيث :

$$د = [د]$$
$$(1،1)$$

ثانيا ـ العمليات على الاشعة :

تضم العمليات على الاشعة الجمع والضرب والتوافقية الخطية والتدوير .

١ ـ جمع الاشعة :

ليكن لدينا شعاعان من الترتيب نفسه س و ع حيث :

$$س = [س_1 \quad س_2 \cdots س_و \cdots س_ن]$$

$$ع = [ع_1 \quad ع_2 \cdots ع_و \cdots ع_ن]$$

ان المجموع الشعاعي لـ س و ع هو شعاع من الترتيب نفسه تنتج عناصره من جمع عناصر الشعاعين س و ع التي لها الدليل نفسه ، أي :

$$س + ع = [س_1 + ع_1 \quad س_2 + ع_2 \cdots س_و + ع_و \cdots س_ن + ع_ن]$$

فاذا كان :

س = [٢ ٣ ٠ ٤]
ع = [٩ ٥ ١ ٨]

فان :

س + ع = [١١ ٨ ١ ١٢]

تشكل عملية الجمع الشعاعي قانونا للتشكيل الداخلي في مجموعة الاشعة من الترتيب نفسه ، ويتميز هذا القانون بخصائص الجمع العددي نفسها ، أي :

آ ــ الخاصة التبديلية : س + ع = ع + س

ب ــ الخاصة التجميعية : (س + ع) + ص = س + (ع+ص)

حـ ــ وجود العنصر الحيادي : ان الشعاع ٠ هو شعاع من الترتيب نفسه أي :

٠ = [٠ ٠ ••• ٠ ••• ٠]

معرف بأن جميع عناصره معدومة ، وهذا يؤدي بالنسبة لكل شعاع س من الترتيب نفسه الى تحقيق العلاقة التالية :

س + ٠ = ٠ + س = س

د ــ وجود شعاع مناظر س من الترتيب نفسه بالنسبة لكل شعاع س :

حيث اذا كان :

$$س = [\, س_{١} \quad س_{٢} \cdots س_{و} \cdots س_{ن} \,]$$

$$\overline{س} = [\, \overline{س_{١}} \quad \overline{س_{٢}} \cdots \overline{س_{و}} \cdots \overline{س_{ن}} \,]$$

فان $س + \overline{س} = \overline{س} + س = ٠$

٢ ـ ضرب الاشعة :

نميز هنا بين ثلاث حالات : ضرب الشعاع بعدد ثابت ، ضرب شعاع عمودي بشعاع أفقي ، ضرب شعاع أفقي بشعاع عمودي •

آ ــ ضرب الشعاع بعدد ثابت :

ليكن لدينا الشعاع $س_{(١ ، ن)}$ والعدد (د) المنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية، نسمي د•س جداء الشعاع س بالعدد (د) ، ونحصل على الشعاع د• س بضرب كل عنصر من عناصر الشعاع س بالعدد الثابت (د) •

أي اذا كان :

$$س_{(١ ، ن)} = [\, س_{١} \; س_{٢} \cdots س_{و} \cdots س_{ن} \,]$$

وكان $د \in ح$

فان $\text{د}\cdot\text{س}_{(\text{١،ن})} = [\ \text{د}\cdot\text{س}_{\text{١}}\ \ \text{د}\cdot\text{س}_{\text{٢}}\ \cdot\cdot\ \text{د}\cdot\text{س}_{\text{و}}\ \cdot\cdot\ \text{د}\cdot\text{س}_{\text{ن}}\ ]$

وبشكل خاص ، ان جداء الشعاع س بالعدد (− ١) يعطي الشعاع المناظر للشعاع س أي س ، لذلك فمن الاسهل أن نكتب (− س) بدلا من (س) الامر الذي يمكن من استعمال رموز عملية الطرح التقليدية •

وبالنظر الى خصائص عمليتي الجمع والضرب ، فان عملية ضرب الاشعة بعدد ثابت تتلخص بالعلاقات التالية بافتراض أن س و ع شعاعان من الترتيب نفسه وأن د ، حـ عددان حقيقيان •

د (حـ • س) = (د • حـ) • س

(د + حـ) س = د • س + حـ • س

د (س + ع) = د • س + د • ع

١ • س = س

تمكن العلاقة الاولى من تركيب عمليتي ضرب (أو أكثر) بعملية واحدة ، حيث يتشكل العدد المضروب به من جداء العددين (د • حـ) أما العلاقة الثانية فتدل على أن الجداء هو عملية توزيعية بالنسبة لعملية الجمع وأن عملية الجمع الجبري قد تحولت الى عملية جمع شعاعي ، أما العلاقة الثالثة فتدل على الخاصة التوزيعية للجداء بالنسبة لعملية الجمع الشعاعي وأخيرا تشير العلاقة الرابعة الى أن الضرب بالعدد (١) هو عملية حيادية بالنسبة لعملية الضرب •

ب ـ ضرب شعاع عمودي بشعاع أفقي :

ليكن لدينا الشعاع العمودي $ع_{(ن،١)}$ والشعاع الافقي $س_{(١،ن)}$

ان ضرب هذين الشعاعين عملية ممكنة لان عدد أعمدة الشعاع الاول (١) يساوي الى عدد أسطر الشعاع الثاني (١) وبالتالي فان ناتج جداء هذين الشعاعين $ع_{(ن،١)} \cdot س_{(١،ن)}$ هو مصفوفة مربعة ترتيبها يساوي (ن ، ن) .

مثال :

$$س_{(١،٣)} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

$$ع_{(٣،١)} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١- \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$$ع_{(٣،١)} \cdot س_{(١،٣)} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١- \\ ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & ١٠ & ٢ \\ ٣- & ٥- & ١- \\ ١٢ & ٢٠ & ٤ \end{bmatrix} =$$

حـ ـ ضرب شعاع أفقي بشعاع عمودي :

باعتبار الشعاعين السابقين س و ع فان عملية ضرب الشعاع الافقي س بالشعاع العمودي ع هي أيضا ممكنة لان عدد أعمدة الشعاع الاول (٣) يساوي الى عدد أسطر الشعاع الثاني (٣) ، وبالتالي فان ناتج جداء هذين الشعاعين $\underset{(١ ، ن)}{س} \cdot \underset{(ن ، ١)}{ع}$ هو مصفوفة مربعة من الترتيب (١ ، ١) أو ما أسميناه سابقا بالعدد الوحيد .

وبتطبيق أرقام المثال السابق نجد :

$$[\,٩\,] = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١- \\ ٤ \end{bmatrix} [\,٣ \quad ٥ \quad ١\,] = \underset{(٣ ، ١)}{ع} \cdot \underset{(١ ، ٣)}{س}$$

٣ ـ المتوافقة الخطية للاشعة :

لا تعد المتوافقة الخطية عملية جديدة على الاشعة ، ولكنها عملية مركبة من الجمع والضرب الشعاعي ، ليكن لدينا الشعاعان س و ع من الترتيب نفسه :

$$\text{س}_{(١،ن)} = [\ \text{س}_{١}\quad \text{س}_{٢}\ \cdots\ \text{س}_{\text{و}}\ \cdots\ \text{س}_{\text{ن}}\ ]$$

$$\text{ع}_{(١،ن)} = [\ \text{ع}_{١}\quad \text{ع}_{٢}\ \cdots\ \text{ع}_{\text{و}}\ \cdots\ \text{ع}_{\text{ن}}\ ]$$

وليكن لدينا أيضا العددان ب ، حـ المنتميان الى مجموعة الاعداد الحقيقية ، يمكننا أن نعرف اعتبارا من الشعاعين س و ع والعددين ب ، حـ الشعاع التالي :

$$\text{ب س} + \text{حـ ع} = [\ (\text{ب س}_{١} + \text{حـ ع}_{١})\ (\text{ب س}_{٢} + \text{حـ ع}_{٢})\ \cdots\ (\text{ب س}_{\text{و}} + \text{حـ ع}_{\text{و}})\ \cdots\ (\text{ب س}_{\text{ن}} + \text{حـ ع}_{\text{ن}})\ ]$$

الذي هو المجموع الشعاعي للجداءين ب س و حـ ع .

يعرف الشعاع ب س+حـ ع بأنه متوافقة خطية للشعاعين س و ع مضروبين على الترتيب بالعددين ب ، حـ ، هذا وان المتوافقة الخطية الناتجة هي شعاع من ترتيب الشعاعين س و ع نفسه .

ويمكن أيضا أن نجد كحالات خاصة للمتوافقة الخطية ب س+حـ ع:

ـ مجموع الشعاعين س + ع اذا أخذنا ب = حـ = ١

ـ جداء الشعاع س بالعدد ب أي ب س اذا افترضنا أن حـ = ٠

ـ جداء الشعاع ع بالعدد حـ أي حـ ع اذا افترضنا أن ب = ٠ .

ويمكن بشكل عام ، اذا افترضنا أن :

$س_1 \quad س_2 \quad \cdots \quad س_ر \quad \cdots \quad س_م$: م شعاعا من الترتيب نفسه وان

$ب_1 \quad ب_2 \quad \cdots \quad ب_ر \quad \cdots \quad ب_م$: م عددا حقيقيا فان :

$$ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + \cdots + ب_ر س_ر + \cdots + ب_م س_م$$

تشكل متوافقة خطية من م شعاعا و م عددا ، ويرمز لهذه المتوافقة الخطية اختصارا :

$$\sum_{ر=1}^{م} ب_ر س_ر$$

حيث (ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، م)

٤ ـ تدوير الاشعة :

رأينا سابقا أن هناك نوعين من الاشعة عمودية أو أفقية ، ومن الممكن الانتقال من الشعاع العمودي الى الشعاع الافقي أو من الشعاع الافقي الى الشعاع العمودي عن طريق عملية التدوير شريطة الحفاظ على ترتيب العناصر نفسه في العمود أو السطر •

فاذا كان لدينا الشعاع العمودي $س_{(ن ، ١)}$ المعرف كما يلي :

$$س_{(ن،١)} = \begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \\ \vdots \\ س_و \\ \vdots \\ س_ن \end{bmatrix}$$

فان مدور هذا الشعاع ونرمز له بـ سَ هو الشعاع الافقي التالي:

$$سَ_{(١،ن)} = [\,س_١ \quad س_٢ \quad \cdots \quad س_و \quad \cdots \quad س_ن\,]$$

أما مدور الشعاع الافقي:

$$ع_{(١،م)} = [\,ع_١ \quad ع_٢ \quad \cdots \quad ع_ر \quad \cdots \quad ع_م\,]$$

فهو الشعاع العمودي $عَ_{(م،١)}$ والمساوي الى:

$$عَ_{(م،١)} = \begin{bmatrix} ع_١ \\ ع_٢ \\ \vdots \\ ع_ر \\ \vdots \\ ع_م \end{bmatrix}$$

هذا وان تدويرين متتاليين يعودان بالشعاع الى حالته الاصلية ، أي :

$$[\bar{\text{س}}]' = \text{س}$$

$$[\text{ع}']' = \text{ع}$$

ثالثا ـ الاستقلال الخطي للاشعة :

نقول عن الاشعة س_1 ، س_2 ·· $\text{س}_{\text{ن}}$ أنها مستقلة خطيا اذا تحققت العلاقة :

$$\text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}} = 0$$

فأدى ذلك الى أن :

$$\text{ب}_1 = 0 \qquad \text{ب}_2 = 0 \qquad \cdots \qquad \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

ونلاحظ أنه اذا كان $\text{ب}_1 = 0$ ، $\text{ب}_2 = 0$ ·· $\text{ب}_{\text{ن}} = 0$

فان $\text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}} = 0$

ومع ذلك فان الاستقلال الخطي للاشعة لا يتحقق الا اذا كان :

$$\text{ب}_1 \text{س}_1 + \text{ب}_2 \text{س}_2 + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}} = 0$$

وينتج عنه : $ب_{١} = ب_{٢} = \cdots = ب_{ن}$ = .:.

أما في الحالة المعاكسة فلا تكون الاشعة مستقلة خطيا .

مثال : برهن أن الشعاعين :

$$س_{(١،٢)} = [\,١ \quad ٢\,]$$

$$ع_{(١،٢)} = [\,٢ \quad ١-\,]$$

مستقلان خطيـــا .

لبرهنة استقلال الشعاعين يجب أن نبرهن :

$ب_{١}س_{١} + ب_{٢}س_{٢}$ = [.:. .:.]

ومنـــه $ب_{١} = ب_{٢}$ = .:.

$ب_{١}س_{١} + ب_{٢}س_{٢} = [\,٢ب_{١} \quad ب_{١}\,] + [\,-ب_{٢} \quad ٢ب_{٢}\,]$ = [.:. .:.]

$= [\,٢ب_{١} - ب_{٢} \quad ب_{١} + ٢ب_{٢}\,]$ = [.:. .:.]

ومنه : $٢ب_{١} - ب_{٢}$ = .:.

$ب_{١} + ٢ب_{٢}$ = .:.

وبجمع العلاقتين الاخيرتين يكون بعد ضرب العلاقة الاولى بـ (٢):

$٤ ب_١ - ٢ ب_٢ = ∴$

$\underline{ب_١ + ٢ب_٢} = \underline{∴}$

$٥ب_١ = ∴$

أو $ب_١ = ∴$

نعوض في العلاقة الثانية $∴ + ٢ ب_٢ = ∴$

$٢ب_٢ = ∴$

$ب_٢ = ∴$

أي أن الشعاعين مستقلان خطيا •

البحث الثاني

المصفوفات وعملياتهـــا

تعد الاشعة التي درسناها في البحث السابق حالـــة خاصة مـــن المصفوفات ، كما تعد العمليات على الاشعة حالات خاصة من العمليات على المصفوفات • سنقوم أولا بتعريف المصفوفة ثم ننتقل لدراســـة العمليات على المصفوفات • وبذلك يشمل هذا البحث النقاط التالية :

أولا ـــ تعريف المصفوفة •

ثانيا ـــ العمليات على المصفوفات •

اولا ـ تعريف المصفوفة :

تعرف المصفوفة بأنها جدول مستطيل يحتوي على عدد منته من الاعداد المنتمية الى مجموعة الاعداد الحقيقية • وتؤلف تلك الاعداد عناصر المصفوفة أو احداثياتها ، فالجدول التالي ب المعرف كالتالي :

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{١ن}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{١و}} & \cdot\cdot\cdot & \text{ب}_{\text{٢١}} & \text{ب}_{\text{١١}} \\ \text{ب}_{\text{٢ن}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{٢و}} & \cdot\cdot\cdot & \text{ب}_{\text{٢٢}} & \text{ب}_{\text{١٢}} \\ \text{ب}_{\text{رن}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{رو}} & \cdot\cdot\cdot & \text{ب}_{\text{ر٢}} & \text{ب}_{\text{ر١}} \\ \text{ب}_{\text{من}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{مو}} & \cdot\cdot\cdot & \text{ب}_{\text{م٢}} & \text{ب}_{\text{م١}} \end{bmatrix} = \text{ب}_{(\text{م،ن})}$$

حيث $ب_{رو} \in ح$

و : ر = ۱ ، ۲ ، ۳ ٠٠٠ م

و = ۱ ، ۲ ، ۳ ٠٠٠ ن

يمثل مصفوفة معرفة على المجموعة ح . تتألف المصفوفة $ب_{(م ، ن)}$ من (م) سطرا أو صفا و (ن) عمودا . ويمثل عدد الاسطر م طول المصفوفة ، أما عدد الاعمدة (ن) فيمثل عرضها ، وباعتبار مؤشري الطول والعرض ، تكون المصفوفة :

عريضة اذا كان م < ن

ومربعة اذا كان م = ن

وطويلة اذا كان م > ن

تحتوي المصفوفة ب التي مرتبتها (م ، ن) على م × ن عنصرا ، وتختلف المصفوفة عن المجموعة في أن عناصرها تلعب أدوارا متمايزة ومرتبطة بأماكنها داخل الجدول ، ويمكن الاستدلال على أي عنصر $ب_{رو}$ بواسطة دليلين :

الدليل الاول (ر) ويدل على ترتيب السطر .

والدليل الثاني (و) ويدل على ترتيب العمود .

وهكذا فان العنصر $ب_{رو}$ يقع في تقاطع السطر (ر) مع العمود (و)

ترتب عناصر المصفوفة ضمن قوسين كبيرتين بشكل ( ) أو بشكل [ ] ولكن لا يمكن استعمال المعترضتين | | أو القوسين المزدوجتين { } لان الشكل الاول مخصص كما سنرى للمحددات والشكل الثاني للمجموعات .

أما الحد العام للمصفوفة (ب) فيكتب وفق أحد الاشكال التالية :

$$ب = (ب_{رو}) \quad أو \quad ب = ب_{و}^{ر} \quad أو \quad [ب_{رو}] \quad أو \quad ||ب_{رو}||$$

ويدل المؤشر الاول أو الاعلى (ر) على ترتيب السطر الذي يقع عليه العنصر .

ويدل المؤشر الثاني أو الاسفل (و) على ترتيب العمود الذي يقع عليه العنصر .

ثانيا ــ العمليات على المصفوفات :

تتألف العمليات الممكن اجراؤها على المصفوفات من الجمع والضرب والتدوير بالاضافة الى العملية المركبة من الجمع والضرب والتي نسميها بالتوافقية الخطية للمصفوفات . أما عملية قلب المصفوفة فسنتعرض لها في بحث لاحق ، وبذلك سندرس العمليات على المصفوفات وفق الترتيب التالي :

١ ــ جمع المصفوفات .

٢ ــ تدوير المصفوفات .

٣ ــ ضرب المصفوفات .

٤ ــ المتوافقة الخطية للمصفوفات .

١ ــ جمع المصفوفات :

لتكن لدينا المصفوفتان ب ، حـ من الترتيب (م ، ن) نفسه ، نسمي المصفوفة ب + حـ بمجموع المصفوفتين ب ، حـ ، ونحصل على عناصره بالجمع العددي للعناصر التي لها الادلة نفسها في المصفوفة ب والمصفوفة حـ ، وعلى هذا فلا يمكن جمع المصفوفات الا اذا كانت من ترتيب واحد .

لنكتب عناصر المصفوفتين ب ، حـ :

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{١ن}} & \cdots & \text{ب}_{\text{١و}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢١}} & \text{ب}_{\text{١١}} \\ \text{ب}_{\text{٢ن}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢و}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢٢}} & \text{ب}_{\text{١٢}} \\ & & & & & \vdots \\ \text{ب}_{\text{رن}} & \cdots & \text{ب}_{\text{رو}} & \cdots & \text{ب}_{\text{ر٢}} & \text{ب}_{\text{ر١}} \\ & & & & & \vdots \\ \text{ب}_{\text{من}} & \cdots & \text{ب}_{\text{مو}} & \cdots & \text{ب}_{\text{م٢}} & \text{ب}_{\text{م١}} \end{bmatrix} = \text{ب}_{(\text{م،ن})}$$

$$\text{ح}_{(\text{م،ن})} = \begin{bmatrix} \text{ح}_{١١} & \text{ح}_{٢١} & \cdots & \text{ح}_{١\text{و}} & \cdots & \text{ح}_{١\text{ن}} \\ \text{ح}_{١٢} & \text{ح}_{٢٢} & \cdots & \text{ح}_{٢\text{و}} & \cdots & \text{ح}_{٢\text{ن}} \\ \vdots & & & & & \\ \text{ح}_{\text{ر}١} & \text{ح}_{\text{ر}٢} & \cdots & \text{ح}_{\text{رو}} & \cdots & \text{ح}_{\text{رن}} \\ \vdots & & & & & \\ \text{ح}_{\text{م}١} & \text{ح}_{\text{م}٢} & \cdots & \text{ح}_{\text{مو}} & \cdots & \text{ح}_{\text{من}} \end{bmatrix}$$

ان مجموع المصفوفتين وليكن $\text{د}_{(\text{م،ن})}$ يساوي :

$$\text{د}_{(\text{م،ن})} = \text{ب}_{(\text{م،ن})} + \text{ح}_{(\text{م،ن})}$$

$$\text{د}_{(\text{م،ن})} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١١} + \text{ح}_{١١} & \text{ب}_{٢١} + \text{ح}_{٢١} & \cdots & \text{ب}_{١\text{و}} + \text{ح}_{١\text{و}} & \cdots & \text{ب}_{١\text{ن}} + \text{ح}_{١\text{ن}} \\ \text{ب}_{١٢} + \text{ح}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} + \text{ح}_{٢٢} & \cdots & \text{ب}_{٢\text{و}} + \text{ح}_{٢\text{و}} & \cdots & \text{ب}_{٢\text{ن}} + \text{ح}_{٢\text{ن}} \\ \vdots & & & & & \\ \text{ب}_{\text{ر}١} + \text{ح}_{\text{ر}١} & \text{ب}_{\text{ر}٢} + \text{ح}_{\text{ر}٢} & \cdots & \text{ب}_{\text{رو}} + \text{ح}_{\text{رو}} & \cdots & \text{ب}_{\text{رن}} + \text{ح}_{\text{رن}} \\ \vdots & & & & & \\ \text{ب}_{\text{م}١} + \text{ح}_{\text{م}١} & \text{ب}_{\text{م}٢} + \text{ح}_{\text{م}٢} & \cdots & \text{ب}_{\text{مو}} + \text{ح}_{\text{مو}} & \cdots & \text{ب}_{\text{من}} + \text{ح}_{\text{من}} \end{bmatrix}$$

مثال عددي :

$$\underset{(2،3)}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 1 & \text{هـ} & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{(2،3)}{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} -2 & \text{ق} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2،3)}{\text{د}} = \begin{bmatrix} -1 & \text{هـ} + \text{ق} & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

وبافتراض أن ب ، حـ ، د مصفوفات من الترتيب (م ، ن) نفسه فان عملية الجمع المصفوفي تتصف بالخصائص التالية :

١ ــ الخاصة التبديلية : $\text{ب} + \text{حـ} = \text{حـ} + \text{ب}$

٢ ــ الخاصة التجميعية : $(\text{ب} + \text{حـ}) + \text{د} = \text{ب} + (\text{حـ} + \text{د})$

٣ ــ وجود المصفوفة المحايدة : ان المصفوفة الصفرية $0_{(\text{م}،\text{ن})}$ المعرفة بأن جميع عناصرها تساوي الى الصفر تحقق العلاقة :

$$\text{ب} + 0 = 0 + \text{ب} = \text{ب}$$

٤ ــ وجود مصفوفة مقابلة لاية مصفوفة ب ، نرمز للمصفوفة المقابلة $\overline{\text{ب}}$ ، وتعرف بأن كل عنصر من عناصرها يساوي بالقيمة المطلقة العنصر المقابل له في المصفوفة ب ولكن يختلف عنه بالاشارة الجبرية ، حيث تتحقق العلاقة :

$$\text{ب} + \overline{\text{ب}} = \overline{\text{ب}} + \text{ب} = 0$$

٢ ـ تدوير المصفوفات :

سنتعرض في هذه الفقرة الى موضوعين أساسيين : مدور المصفوفة ، ومدور جداء مصفوفتين •

آ ـ يعد تدوير المصفوفة تعميما لتدوير الشعاع ، فاذا كان لدينا المصفوفة ب من الترتيب (م ، ن) •

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{١ن}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{١و}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢١}} & \text{ب}_{\text{١١}} \\ \text{ب}_{\text{٢ن}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{٢و}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢٢}} & \text{ب}_{\text{١٢}} \\ & & & & & \vdots \\ \text{ب}_{\text{رن}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{رو}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢ر}} & \text{ب}_{\text{١ر}} \\ & & & & & \vdots \\ \text{ب}_{\text{من}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{مو}} & \cdots & \text{ب}_{\text{٢م}} & \text{ب}_{\text{١م}} \end{bmatrix} = \text{ب}_{(\text{م،ن})}$$

فاننا نحصل على مدور المصفوفة ب ونرمز له ب َ بجعل كل سطر من أسطرها عمودا وكل عمود من أعمدتها سطرا ، شريطة الحفاظ على ترتيب العناصر ضمن الاسطر والاعمدة وبهذا تكون ب َ مساوية الى :

$$\text{ب}_{(\text{ن}،\text{م})} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{١٢} & \cdots & \text{ب}_{١\text{ر}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{١\text{م}} \\ \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{٢٢} & \cdots & \text{ب}_{٢\text{ر}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{٢\text{م}} \\ \vdots & & & & & \\ \text{ب}_{\text{و}١} & \text{ب}_{\text{و}٢} & \cdots & \text{ب}_{\text{ور}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{وم}} \\ \vdots & & & & & \\ \text{ب}_{\text{ن}١} & \text{ب}_{\text{ن}٢} & \cdots & \text{ب}_{\text{نر}} & \cdot\cdot & \text{ب}_{\text{نم}} \end{bmatrix}$$

مثال عددي :

اذا كانت

$$\text{ب}_{(٣،٢)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

فان $\text{ب}'_{(٢،٣)} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

وكذلك فان $(\text{ب}')' = \text{ب}$ أي أن مدور المصفوفة المدورة يساوي الى المصفوفة الاصلية ، وباعتبار عمليتي الجمع والتدوير ، يمكن التحقق من العلاقة التالية :

$$\underset{(\text{م،ن})}{\text{ب}} + \underset{(\text{م،ن})}{\text{حـ}} = \underset{(\text{م،ن})}{\text{د}}$$

$$\underset{(\text{ن،م})}{\text{ب}'} + \underset{(\text{ن،م})}{\text{حـ}'} = \underset{(\text{ن،م})}{\text{د}'}$$

أي أن مجموع مدور مصفوفتين يساوي الى مدور مجموعهما •

ب ــ مدور جداء مصفوفتين :

لتكن المصفوفتان $\underset{(\text{م،ن})}{\text{ب}}$ ، $\underset{(\text{ن،و})}{\text{حـ}}$ حيث يشكل $\underset{(\text{م،ن})}{\text{ب}} \bullet \underset{(\text{ن،و})}{\text{حـ}}$ جداؤهما •

لنرمز بـ $\underset{(\text{ن،م})}{\text{ب}'}$ مدور المصفوفة ب ، و $\underset{(\text{و،ن})}{\text{حـ}'}$ مدور المصفوفة حـ•

نعمم العلاقة التي أشرنا اليها بخصوص تدوير جداء الاشعة ونقول ان مدور جداء مصفوفتين يساوي الى جداء مدوريهما بعد تبديل ترتيبهما ، وهذا ما نلخصه بالعلاقة التالية :

$$\left[\underset{(\text{م،ن})}{\text{ب}} \bullet \underset{(\text{ن،و})}{\text{حـ}}\right]' = \underset{(\text{و،ن})}{\text{حـ}'} \bullet \underset{(\text{ن،م})}{\text{ب}'}$$

مثال تطبيقي :

لتكن :

$$\underset{(2,3)}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underset{(3,2)}{\text{ب}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(4,2)}{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{(2,4)}{\text{حـ}'} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{الجداء حـ∘ب} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 13 \\ 9 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}' \circ \text{حـ}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 9 & -4 & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 6 \\ 13 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ بسهولة أن $(\text{حـ} \circ \text{ب})' = \text{ب}' \circ \text{حـ}'$

٣ ــ ضرب المصفوفات :

سنناقش في دراسة ضرب المصفوفات الحالات الآتية :

آ ــ ضرب المصفوفة بعدد •

ب ــ جداء شعاع بمصفوفة •

حـ ــ جداء مصفوفة بشعاع •

د ــ جداء مصفوفة بمصفوفة •

هـ ــ خواص ضرب المصفوفات •

أ ــ ضرب المصفوفة بعدد :

لتكن لدينا المصفوفة $س_{(ن،م)}$ التي ترتيبها (ن ، م) وليكن لدينا أيضا العدد الحقيقي ب حيث ب $\in$ ح • نسمي المصفوفة ب س بجداء المصفوفة س بالعدد ب ، ونحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة س بالعدد ب •

وبشكل خاص ، فان المصفوفة $\overline{س}_{(م،ن)}$ المقابلة للمصفوفة $س_{(م،ن)}$ تنتج عن جداء المصفوفة س بالعدد (— ١) ، الامر الذي يمكن من استبدال الرمز $\overline{س}$ بالرمز (— س) ويسمح بالتالي باستخدام عملية الطرح المصفوفي المقابلة لعملية الجمع المصفوفي •

وبافتراض أن س ، ع مصفوفتان من الترتيب نفسه وأن ب ، حـ

عددان حقيقيان ، فان عمليتي الجمع والضرب تمكن من ذكر الخواص التالية :

$$ب\,(حـ \cdot س) = (ب \cdot حـ)\,س$$

$$(ب + حـ)\,س = ب\,س + حـ\,س$$

$$ب\,(س + ع) = ب\,س + ب\,ع$$

$$1 \cdot س = س$$

هذا وان علاقة الجداء بين مصفوفة وعدد تبقى سليمة بعد عملية التدوير وذلك ما نعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$[ب \cdot س_{(م،ن)} = ع_{(م،ن)}] \Leftrightarrow [ب \cdot س'_{(ن،م)} = ع'_{(ن،م)}]$$

مثال عددي : لنفرض أن المصفوفة $س_{(3،2)}$:

$$س_{(3،2)} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ . & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ وان العدد ب = ٣

فان الجداء ٣ س يساوي :

$$3 \cdot س_{(3،2)} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ . & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

واذا كان سَ هو مدور س أي :

$$سَ_{(٢،٣)} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٥ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

وكان $ع_{(٣،٢)} = ٥ \, س_{(٣،٢)}$

$$ع_{(٣،٢)} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢٥ \\ ٠ & -٥ \\ ٥ & ١٥ \end{bmatrix}$$

أما مدور المصفوفة :

$$٥ \, سَ_{(٢،٣)} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٥ \\ ٢٥ & -٥ & ١٥ \end{bmatrix} = عَ_{(٢،٣)}$$

ب ـ جداء شعاع بمصفوفة :

ليكن الشعاع الافقي $س_{(١،م)}$ والمصفوفة $ب_{(م،ن)}$ • يعرف الجداء $س_{(١،م)} \bullet ب_{(م،ن)}$ للشعاع الافقي س في المصفوفة ب

(ويسمى جداء س في ب من جهة اليمين) بأن الشعاع الافقي $حـ_{(١،ن)}$ المعرفة عناصره بالعلاقة التالية :

$$س_{(١،م)} \bullet ب_{(م،ن)} = حـ_{(١،ن)}$$

ولهذا فلكي تتم عملية الجداء يجب أن يكون (م) عدد أعمدة الشعاع الافقي س مساويا الى (م) عدد أسطر المصفوفة ب ، وهذان العددان المشتركان يكتبان في صيغة الضرب متجاورين، ونلاحظ اختفاء العدد (م) في ترتيب الشعاع الافقي الناتج $\text{ح}_{(١،ن)}$ •

مثال عددي : ليكن الشعاع $\text{س}_{(١،٣)}$ والمصفوفة $\text{ب}_{(٣،٢)}$

$$\text{س}_{(١،٣)} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}_{(٣،٢)} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

فيكون الجداء :

$$\text{س}_{(١،٣)} \bullet \text{ب}_{(٣،٢)} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢٥ \end{bmatrix}$$

ح ـ جداء مصفوفة بشعاع :

ليكن لدينا الشعاع العمودي $\text{ع}_{(ن،١)}$ والمصفوفة $\text{ب}_{(م،ن)}$

يعرف الجداء : $\text{ب}_{(م،ن)} \bullet \text{ع}_{(ن،١)}$ للشعاع العمودي ع في المصفوفة

ب (ويسمى جداء ع في ب من جهة اليسار) بأنه الشعاع العمودي حـ $_{(\text{م،١})}$ المعرف بالعلاقة التالية :

$$\text{ب}_{(\text{م،ن})} \bullet \text{ع}_{(\text{ن،١})} = \text{حـ}_{(\text{م،١})}$$

مثال عددي :

$$\text{ع}_{(\text{٣،١})} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} \qquad \text{ب}_{(\text{٤،٣})} = \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢- & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

فالجـداء : $\text{ب}_{(\text{٤،٣})} \bullet \text{ع}_{(\text{٣،١})} = \text{حـ}_{(\text{٤،١})}$

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ١٦ \\ ٧ \\ ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢- & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

د ــ جداء مصفوفة بمصفوفة :

لنأخذ المصفوفة ب $_{(\text{م،ن})}$ التي عدد أسطرها (م) وعدد أعمدتها (ن) ، والمصفوفة حـ $_{(\text{ن،و})}$ التي عدد أسطرها (ن) وعدد أعمدتها (و) ، ان جداء المصفوفة ب بالمصفوفة حـ ونرمز له بـ (ب • حـ) هو المصفوفة د التي تعرف بالعلاقة :

$$\underset{(م،ن)}{ب} \cdot \underset{(ن،و)}{حـ} = \underset{(م،و)}{د}$$

ونحصل على عناصر المصفوفة د بضرب عناصر السطر الاول من المصفوفة ب بعناصر العمود الاول، ثم الثاني، ثم الثالث من حـ وهكذا. ثم نأخذ عناصر السطر الثاني ونضربها بعناصر العمود الاول ، ثم الثاني، ثم الثالث من حـ وهكذا ..

مثال عددي :

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٠ \\ ٥ & ٦ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١٠ & ٥ \\ ٠ & ٤ & ٧ & ٢ \\ ١ & ٦ & ١٥ & ٢٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٤ & ٨٩ & ١٢٩ & ٩٩ \\ ١٣ & ٦٢ & ٩٠ & ٥٠ \\ ٢٤ & ٨٤ & ١٠١ & ٤٦ \\ ١٩ & ٩٣ & ١٥٢ & ١١٧ \end{bmatrix}$$

$$\underset{(٤،٣)}{ب} \cdot \underset{(٣،٤)}{حـ} = \underset{(٤،٤)}{د}$$

هـ ـ خواص ضرب المصفوفات :

تتميز عملية ضرب المصفوفات بالخصائص التالية :

١ ـ لا تتم عملية ضرب المصفوفات الا اذا كان عدد أعمدة

المصفوفة الاولى مساويا الى عدد أسطر المصفوفة الثانية ، ويجب أن يكون العددان المتساويان متجاورين • فاذا كان لدينا المصفوفة ب (م،ن) والمصفوفة حـ (ن،و) ، فيمكن اجراء عملية الضرب لان الشرط السابق قد تحقق ب (م،ن) • حـ (ن،و) حيث نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة ب يساوي (ن) الذي يساوي بدوره الى عدد أسطر المصفوفة حـ •

٢ ـ ومن الممكن في بعض الاحيان أن تشترك المصفوفتان بكلا العنصرين ، فاذا كانت ب (م،ن) و حـ (ن،م) فيمكن والحالة هذه اجراء عملية ضرب المصفوفة ب بالمصفوفة حـ فيكون الناتج مصفوفة من الترتيب (م ، م) ، أو ضرب المصفوفة حـ بالمصفوفة ب فيكون الناتج مصفوفة من الترتيب (ن،ن) ، وبالطبع فان المصفوفتين الناتجتين غير متساويتين •

٣ ـ تمتاز عملية الجداء المصفوفي بأنها عملية غير تبديلية ، فالجداء ب حـ $\neq$ حـ ب حتى وان أمكن اجراء عملية الجداء في كلا الحالتين كما هو الامر بالنسبة للمصفوفتين حـ (ن،م) و ب (م،ن) لتساوي عدد أسطر احدى المصفوفتين مع أعمدة الاخرى وبالعكس ، وحتى في المصفوفات المربعة فان عملية الجداء ليست بصورة عامة تبديلية كما يبدو ذلك واضحا من الامثلة التالية :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٦ \\ ٥ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢ & ٨ & ٢٤ \\ ١ & ٠ & ٦ \\ ١٣ & ٤ & ٢٤ \end{bmatrix}$$

ب • حـ = د

(٣،٢) (٢،٣) (٣،٣)

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٦ \\ ٥ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٦ \\ ٢١ & ٢٦ \end{bmatrix}$$

حـ • ب = ق

(٢،٣) (٣،٢) (٢،٢)

مثال آخر :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٩ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧٦ & ٤٢ \\ ٥٥ & ٢٩ \end{bmatrix}$$

ب • حـ = د

(٢،٢) (٢،٢) (٢،٢)

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٩ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٨ & ٣٨ \\ ٤٤ & ٨٧ \end{bmatrix}$$

حـ • ب = ق

(٢،٢) (٢،٢) (٢،٢)

ومن الواضح أن ق ≠ د • وهكذا نستنتج أن عملية جداء المصفوفات هي عملية غير تبديلية بخلاف الجداء العادي •

٤ ـ الخاصة التجميعية : تتصف عملية الجداء المصفوفي بأنها عملية تجميعية ، فاذا كان لدينا المصفوفات $\underset{(\text{ل،م})}{\text{ب}}$ ، $\underset{(\text{م،ن})}{\text{حـ}}$ ، $\underset{(\text{ن،و})}{\text{د}}$

فان عملية الجداء تحقق العلاقة التالية :

$$\left[\underset{(\text{ل،م})}{\text{ب}} \circ \underset{(\text{م،ن})}{\text{حـ}}\right] \underset{(\text{ن،و})}{\text{د}} = \underset{(\text{ل،م})}{\text{ب}} \left[\underset{(\text{م،ن})}{\text{حـ}} \circ \underset{(\text{ن،و})}{\text{د}}\right]$$

لنطبق هذه الخاصة على ضوء المثال التالي حيث :

$$\underset{(\text{٤،٣})}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\text{٣،٤})}{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{(\text{٤،٢})}{\text{د}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

لنأخذ الطرف الاول من العلاقة السابقة ولنحسب ب ∘ حـ ثم نضرب الناتج بـ د :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٧ & ٩ & ٤ \\ ٢٣ & ١١ & ٢٧ & -٣ \\ ١٧ & ١٣ & ١١ & -١٣ \\ ١٤ & ٤ & ٢٣ & ٦ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢٢ & ٣٦ \\ ٤٢ & ٧٥ \\ ٣٠ & ١٩ \\ ٢٨ & ٧٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٠ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٧ & ٩ & ٤ \\ ٢٣ & ١١ & ٢٧ & -٣ \\ ١٧ & ١٣ & ١١ & -١٣ \\ ١٤ & ٤ & ٢٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

ثم لنأخذ الطرف الثاني فنضرب حـ • د ثم الناتج بضربه بـ ب :

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ١٣ \\ ٨ & ١٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٠ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٢ & ٣٦ \\ ٤٢ & ٧٥ \\ ٣٠ & ١٩ \\ ٢٨ & ٧٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ١٣ \\ ٨ & ١٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

٥ ــ الخاصة التوزيعية :

بما أن عملية الضرب المصفوفي غير تبديلية ، فاننا نفرق بين الخاصة التوزيعية من جهة اليمين ومن جهة اليسار لعملية الضرب بالنسبة لعملية الجمع المصفوفي •

آ ــ الخاصة التوزيعية من جهة اليسار :

لتكن لدينا المصفوفة $س_{(ل،م)}$ وترتيبها (ل ، م)

والمصفوفتان $ع_1$ ، $ع_2$ من الترتيب (م ، ن)

والعددان الحقيقيان $ب_1$ ، $ب_2$

بالاستناد الى الخاصة التوزيعية من جهة اليسار تتحقق العلاقة التالية :

$$س\,(ب_1\,ع_1 + ب_2\,ع_2) = ب_1\,(س\,ع_1) + ب_2\,(س\,ع_2)$$

وبشكل خاص :

$$س\,(ع_1 + ع_2) = س\,ع_1 + س\,ع_2$$

$$و\ س\,(ب_1\,ع_1) = ب_1\,س\,ع_1$$

ب ــ الخاصة التوزيعية من جهة اليمين :

لتكن لدينا المصفوفتان $س_1$ ، $س_2$ من الترتيب (ل ، م) نفسه

والمصفوفة ع من الترتيب (م ، ن) ،

والعددان الحقيقيان $ب_1$ ، $ب_2$ •

بالاستناد الى الخاصة التوزيعية من جهة اليمين تتحقق العلاقة التالية :

$$(ب_1\,س_1 + ب_2\,س_2)\,ع = ب_1\,س_1\,ع + ب_2\,س_2\,ع$$

وبشكل خاص :

$$(\text{س}_1 + \text{س}_2)\,\text{ع} = \text{س}_1\,\text{ع} + \text{س}_2\,\text{ع}$$

و

$$(\text{ب}_1\,\text{س}_1)\,\text{ع} = \text{ب}_1\,\text{س}_1\,\text{ع}$$

تمكن الخاصة التوزيعية لعملية الضرب بالنسبة لعملية الجمع من تطبيق القواعد المستعملة في الحساب الجبري على الحساب المصفوفي مع الاخذ بعين الاعتبار الاحتياطات التالية :

ـ ان عملية الجمع والضرب المصفوفي ليستا عمليتين شاملتين (لعدم شمولهما الا على المصفوفات ذات الترتيب الواحد) ، لذا يجب ألا نكتب الا الصيغ ذات المغزى المصفوفي •

ـ ان عملية الضرب المصفوفي ليست بصورة عامة تبديلية •

ـ لا توجد عملية قسمة مصفوفية علما بأن مقلوب المصفوفة كما سنرى سيؤدي عندما يمكن حسابه الى عملية مشابهة لعملية القسمة •

٤ ـ المتوافقة الخطية للمصفوفات :

بتركيب عمليتي جمع وضرب المصفوفة بعدد ، يمكن الحصول على المتوافقة الخطية للمصفوفات حيث تبدو من خلالها العمليتان السابقتان كحالات خاصة •

فاذا افترضنا أن س ، ع مصفوفتان من الترتيب (م ، ن) نفسه ، حيث :

$$\text{س} = (\text{س}_{\text{رو}})$$

$$\text{ع} = (\text{ع}_{\text{رو}})$$

وكان ب ، حـ عددين حقيقيين ، فاننا نعرف المتوافقة الخطية للمصفوفتين س ، ع المخصصتين على التوالي بالعددين ب ، حـ بالعلاقة التالية :

$$\text{ب س}_{(\text{م،ن})} + \text{حـ} \cdot \text{ع}_{(\text{م،ن})} = (\text{ب} \cdot \text{س}_{\text{رو}} + \text{حـ} \cdot \text{ع}_{\text{رو}})$$

مثال : لتكن :

$$\text{س}_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \text{ع}_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

و ب = ٢ ، حـ = ٣ فيكون :

$$\text{٢ س} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix} \qquad \text{٣ ع} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ١٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

والمتوافقة الخطية للمصفوفتين س ، ع :

$$\text{٢ س} + \text{٣ ع} = \begin{bmatrix} ٧ & ١١ \\ ٢٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

المبحث الثالث

حالات مصفوفية خاصة

تتسم بعض المصفوفات بخصائص وبمميزات معينة مرتبطة بترتيب المصفوفة ، وبطبيعة العناصر وتوزيعها داخل المصفوفة ، وبالعلاقة بين أسطر المصفوفة وأعمدتها ، واعتمادا على هذه الخصائص سنستعرض بعض المصفوفات الخاصة وفق التسلسل التالي :

أولا : المصفوفة الصفرية •

ثانيا : المصفوفة المتماثلة والمصفوفة المتقابلة •

ثالثا : المصفوفة الانعدامية •

رابعا : المصفوفة الاحادية •

خامسا : المصفوفة النظامية •

سادسا : المصفوفة المثلثية •

سابعا : المصفوفة القطرية النظامية •

ثامنا : مصفوفة المتبادلات •

تاسعا : مصفوفة التبديل •

عاشرا : المصفوفة الماركوفية •

اولا : المصفوفة الصفرية :

المصفوفة المعدومة أو المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها تساوي الصفر ، وبالنظر الى وجود مصفوفات من تراتيب مختلفة فان هناك مصفوفات معدومة بعدد تراتيب المصفوفات الممكنة . وتتصف المصفوفة المعدومة كما رأينا سابقا بأنها حيادية بالنسبة لعملية الجمع ، أي :

$$\text{ب}_{(\text{م،ن})} + \therefore_{(\text{م،ن})} = \therefore_{(\text{م،ن})} + \text{ب}_{(\text{م،ن})} = \text{ب}_{(\text{م،ن})}$$

كذلك فان لكل مصفوفة $\text{ب}_{(\text{م،ن})}$ مصفوفة مقابلة $-\text{ب}_{(\text{م،ن})}$ تحقق معها العلاقة :

$$\text{ب}_{(\text{م،ن})} - \text{ب}_{(\text{م،ن})} = \therefore_{(\text{م،ن})}$$

أما اذا كانت عملية الضرب ممكنة من حيث توافر شرط درجة المصفوفتين ب و $\therefore$ فانه تتحقق العلاقات التالية :

$$\therefore_{(\text{ل،م})} \cdot \text{ب}_{(\text{م،ن})} = \therefore_{(\text{ل،ن})}$$

$$\text{ب}_{(\text{م،ن})} \cdot \therefore_{(\text{ن،و})} = \therefore_{(\text{م،و})}$$

تلعب المصفوفة الصفرية بالنسبة للمصفوفات الدور الذي يلعبه الصفر بالنسبة للعمليات الحسابية ، ولكن في حين أن هناك عددا وحيدا هو الصفر ، فان هناك مصفوفات معدومة كثيرة بعدد المصفوفات التي تراتيبها (م،ن) وبالاضافة الى ذلك ففي حين أن جداء

عددين لا يمكن أن يكون مساويا للصفر مالم يكن أحدهما على الاقل مساويا للصفر ، فان مصفوفتين غير معدومتين يمكن أن يكون جداؤهما مساويا للمصفوفة الصفرية ، كما تدل على ذلك الامثلة التالية :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٣- & ٢ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٤- \\ ١٥- & ١٠ \\ ٩- & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٠ & ١٤ \\ ١٥ & ٢١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

وبشكل عام ، فاذا كان :

$$\text{ب}_{(\text{م،ن})} \cdot \text{حـ}_{(\text{ن،و})} = ٠_{(\text{م،و})}$$

وكان $\text{ب}_{(\text{م،ن})} \neq ٠_{(\text{م،ن})}$

$$\text{حـ}_{(\text{م،و})} \neq ٠_{(\text{م،و})}$$

فاننا نسمي المصفوفة ب بالقاسم العادم من اليمين ، أو قاسم للصفر من اليمين • والمصفوفة حـ بالقاسم العادم من اليسار أو قاسم للصفر من اليسار •

ثانيا : المصفوفة المتماثلة والمصفوفة المتقابلة :

نقول عن مصفوفة ب أنها متماثلة اذا كانت مساوية لمدورها أي ب = بَ ومن هنا ينتج أن كل مصفوفة متماثلة هي مصفوفة مربعة ترتيبها (ن،ن) ، بالاضافة الى ذلك فان الحد العام ($ب_{رو}$) في المصفوفة ب يساوي الى الحد العام في المصفوفة المدورة بَ والذي نرمز اليه بـ ($ب_{ور}$) ، لهذا فان عناصر المصفوفة المتماثلة متناظرة بالنسبة لعناصر القطر الرئيس الذي تحقق عناصره $ب_{رو}$ المساواة ر = و أي تساوي ترتيب السطر الى ترتيب العمود :

مثال :

$$ب_{(٣،٣)} = \begin{bmatrix} -٥ & -٩ & ٧ \\ -٩ & ٣ & ٤ \\ ٧ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$$

كما نقول عن مصفوفة بأنها متقابلة اذا كان لكل عنصر منها عنصر مقابل بالنسبة لعناصر القطر الرئيس ، وبمعنى أوضح تحقق عناصر المصفوفة المتقابلة المساواة $ب_{رو} = -ب_{ور}$ ، ومن هنا ينتج أن المصفوفة المتقابلة هي أيضا مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيس تساوي الصفر ويساوي كل عنصر فيها بالقيمة المطلقة للعنصر المناظر له بالنسبة للقطر الرئيس ولكنه يختلف عنه بالاشارة الجبرية ، ومما يذكر فان المصفوفة المتقابلة تحقق العلاقة ب + بَ = ٠ .

مثال :

$$ب_{(٣،٣)} = \begin{bmatrix} ٧- & ٩ & ٠ \\ ٤- & ٠ & ٩- \\ ٠ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

ثالثا : المصفوفة الانعدامية :

نقول عن مصفوفة مربعة أنها انعدامية اذا كانت مرفوعة لقيم صحيحة متتالية فأصبحت معدومة اعتبارا من قيمة محددة للقوة التي هي درجة انعدامية المصفوفة أي اذا كانت :

$$ن^{ك}_{(م،م)} = ٠_{(م،م)}$$

وكان $ن^{ك-١}_{(م،م)} \neq ٠_{(م،م)}$

فان المصفوفة $ن_{(م،م)}$ هي مصفوفة انعدامية من الدرجة ك .

مثال :

$$المصفوفة\ ن_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ٤- & ٦ \\ ٦- & ٩ \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\text{٢،٢})}{\text{ن}^{\text{٢}}} = \begin{bmatrix} \text{٦} & \text{٤}- \\ \text{٩} & \text{٦}- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٦} & \text{٤}- \\ \text{٩} & \text{٦}- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} \end{bmatrix} = \underset{(\text{٢،٢})}{\text{٠}}$$

أي أن المصفوفة ن انعدامية من الدرجة الثانية •

رابعا : المصفوفة الاحادية :

المصفوفة الاحادية مصفوفة مربعة تساوي كل عناصرها الصفر ما عدا عناصر القطر الرئيس التي تساوي الواحد ، هـذا وتوجـد مصفوفات أحادية بقدر ما هناك من تراتيب (ن ، ن) ونرمز لهـذه المصفوفات $\underset{(\text{ن ، ن})}{\text{أ}}$ وتدل على المصفوفة الاحادية من المرتبة (ن ، ن)•

تتميز المصفوفة الاحادية بأنها مصفوفة حيادية بالنسبة لعمليـة الضرب ، أي أنها تحقق العلاقة :

$$\underset{(\text{ن،ن})}{\text{أ}} \bullet \underset{(\text{ن،ن})}{\text{ب}} = \underset{(\text{ن،ن})}{\text{ب}}$$

$$\underset{(\text{ن،ن})}{\text{ب}} \bullet \underset{(\text{ن،ن})}{\text{أ}} = \underset{(\text{ن،ن})}{\text{ب}}$$

ونلاحظ أن المصفوفات الاحادية هي وحدها التي تتصف بخاصة الحياد المصفوفي ، ويمكن أن نلاحظ أيضا أن المصفوفات الاحاديـة متماثلة ، وبالتالي فان الضرب من جهة اليمين أو من جهـة اليسـار لمصفوفة ما بمصفوفة أحادية يؤدي الى النتيجة نفسها ، أما اذا أخذنا مدور كل من العلاقتين السابقتين فاننا نحصل على ما يلي :

$$\underset{(ن،ن)}{\text{أ}} \cdot \underset{(ن،م)}{\text{ب}} = \underset{(ن،م)}{\text{ب}} \Leftrightarrow \underset{(م،ن)}{\text{ب}'} \cdot \underset{(ن،ن)}{\text{أ}} = \underset{(م،ن)}{\text{ب}'}$$

$$\underset{(م،ن)}{\text{ب}} \cdot \underset{(ن،ن)}{\text{أ}} = \underset{(م،ن)}{\text{ب}} \Leftrightarrow \underset{(ن،ن)}{\text{أ}} \cdot \underset{(ن،م)}{\text{ب}'} = \underset{(ن،م)}{\text{ب}'}$$

هذا وتشبه المصفوفة الاحادية بالنسبة للمصفوفات العدد واحد بالنسبة للعمليات الحسابية ، ولكن في حين أن هناك الكثير من المصفوفات الاحادية الا أنه لا يوجد الا رقم وحيد هو (١) ، وبالعكس فان كل عدد لا يساوي الصفر يقبل عددا مقلوبا حيث يكون جداؤهما يساوي الى الواحد ، أما مشكلة مقلوب المصفوفة فلا تعرض بالسهولة نفسها ، فاذا كان الجداء :

$$\underset{(ن،م)}{\text{ب}} \cdot \underset{(م،ن)}{\text{حـ}} = \underset{(ن،ن)}{\text{أ}}$$

مساويا الى المصفوفة الاحادية ، فاننا نقول ان المصفوفة ب هي مقلوب المصفوفة حـ من جهة اليمين ، وأن المصفوفة حـ هي مقلوب المصفوفة ب من جهة اليسار •

مثال :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \end{bmatrix}$$

مثال آخر :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٥ & -٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underset{(٢،٢)}{أ}$$

فاذا رمزنا الى مقلوب ب بـ $ب^{-١}$ ولمقلوب حـ بـ $حـ^{-١}$ فيكون :

$$حـ^{-١} \cdot حـ = أ$$

$$ب^{-١} \cdot ب = أ$$

خامسا : المصفوفة النظامية :

يكون للمصفوفة مقلوب من اليسار ومن اليمين اذا حققت العلاقة التالية :

$$\underset{(ن،م)}{ب} \cdot \underset{(م،ن)}{حـ} = \underset{(ن،ن)}{أ}$$

ونقول ان المصفوفة ب هي مقلوب حـ من اليمين ، ونقول أيضا ان المصفوفة حـ هي مقلوب المصفوفة ب من جهة اليسار .

وبالاعتماد على الخاصة التجميعية بالنسبة لعملية الجداءالمصفوفي، يمكن القول بأنه اذا قبلت حـ مقلوبا من اليسار د ومقلوبا من اليمين ب فتكون المصفوفتان ب و د متساويتين ، والمصفوفة حـ لا تقبل أي

مقلوب آخر من اليمين أو اليسار وحتى يكون للمصفوفة معكوسا من اليمين ومن اليسار يجب أن تكون المصفوفة حـ ذات أعمـدة وذات أسطر مستقلة خطيا الامر الذي يفرض أن تكون المصفوفة حـ مربعة • وتكون المصفوفة حـ نظامية اذا قبلت مقلوبان متساويان من اليمين ومن اليسار ، هذا وان أي مصفوفة نظامية تحقق العلاقة التالية :

$$أ_{(م،م)} = ح_{(م،م)} \cdot ح^{-1}_{(م،م)} = ح^{-1}_{(م،م)} \cdot ح_{(م،م)}$$

ومن هذه المصفوفات نذكر الامثلة :

$$ح = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ٥ & -٢ \\ -٤ & ٤ & -٣ \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

أما اذا لم تقبل المصفوفة مقلوبا من اليمين أو من اليسار فنسميها المصفوفة المنفردة ومن هذه المصفوفات مصفوفات القواسم العادمة من اليمين واليسار ، مثال :

$$هـ = \begin{bmatrix} \vdots & ٤ & ٣ \\ \vdots & ٧ & ٥ \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \qquad د = \begin{bmatrix} ١٤ & ١٠ \\ ٢١ & ١٥ \end{bmatrix}$$

هذا وتمتاز المصفوفة النظامية بامكانية رفعها الى قوى صحيحة، فاستنادا الى الخاصة التجميعية ، فاننا نقبل بالنسبة لكل مصفوفـة نظامية ب ولكل عدد صحيح موجب ن العلاقة :

$$ب^{ن} = \underbrace{ب \cdot ب \cdot ب \cdots ب}_{\text{ن مرة}} = ب^{ن}$$

بالاضافة الى ذلك ، من المفيد التذكير بالملاحظات التالية :

ـ لا ترفع الا المصفوفات المربعة الى قوى صحيحة موجبة أو تساوي الصفر . واذا كانت القوة مساوية للصفر فان الناتج هو المصفوفة الاحادية من الترتيب نفسه .

ـ لا يمكن رفع الا المصفوفات النظامية الى قوى صحيحةسالبة.

ـ ان عملية الجداء المصفوفي ليست عموما تبديلية الا بالنسبة للمصفوفات المرفوعة لقوة أو لمتوافقاتها الخطية .

ـ لا توجد عملية قسمة مصفوفية .

ـ اذا حققت المصفوفة المربعة ب العلاقة $ب^{2} = ب$ فتسمى المصفوفة ب متساوية القوى .

سادسا : المصفوفة المثلثية :

نسمى المصفوفة المربعة $ب_{(ن،ن)}$ بالمصفوفة المثلثية (أو المثلثة) العليا أو الدنيا اذا كانت جميع عناصرها الواقعة تحت أو فوق القطر الرئيس مساوية للصفر في حين ان عناصر القطر الرئيس لا تساوي الصفر ، وهذا ما نعبر عنه بالعلاقات التالية :

في المصفوفة المثلثية العليا ب :

$$\text{ب}_{(٣،٣)} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{٣١} \\ \therefore & \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{٣٢} \\ \therefore & \therefore & \text{ب}_{٣٣} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{ب}_{\text{رو}} \neq \therefore \quad \text{ر} = \text{و} \\ \text{ب}_{\text{رو}} \neq \therefore \quad \text{ر} < \text{و} \\ \text{ب}_{\text{رو}} = \therefore \quad \text{ر} > \text{و} \end{array}$$

وفي المصفوفة المثلثية الدنيا ب :

$$\text{ب}_{(٣،٣)} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١١} & \therefore & \therefore \\ \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} & \therefore \\ \text{ب}_{١٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{٣٣} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{ب}_{\text{رو}} \neq \therefore \quad \text{ر} = \text{و} \\ \text{ب}_{\text{رو}} \neq \therefore \quad \text{ر} > \text{و} \\ \text{ب}_{\text{رو}} = \therefore \quad \text{ر} < \text{و} \end{array}$$

سابعا : المصفوفة القطرية النظامية :

المصفوفة القطرية النظامية هي مصفوفة مربعة كل عناصرها تساوي الصفر ماعدا عناصر القطر الرئيس التي تختلف كلها عن الصفر، أي أنها تأخذ الشكل العام التالي :

$$\text{ق}_{(\text{م}،\text{م})} = \begin{bmatrix} \text{ق}_{١١} & \therefore & \therefore & \cdots & \therefore \\ \therefore & \text{ق}_{٢٢} & \therefore & \cdots & \therefore \\ \therefore & \therefore & \text{ق}_{٣٣} & \cdots & \therefore \\ \therefore & \therefore & \therefore & \cdots & \text{ق}_{\text{مم}} \end{bmatrix}$$

لكل مصفوفة قطرية نظامية مقلوب من الترتيب نفسه ، تساوي عناصر قطره الرئيس على الترتيب مقاليب عناصـر القطر الرئيس في المصفوفة الاصلية ، أي :

$$\begin{bmatrix} ب_{١١} & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ب_{٢٢} & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ب_{٣٣} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ب_{٤٤} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{١}{ب_{١١}} & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{ب_{٢٢}} & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{ب_{٣٣}} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & \frac{١}{ب_{٤٤}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

أما اذا تساوت عناصر القطر الرئيس في مصفوفة قطرية نظامية ، أي :

$$ب_{١١} = ب_{٢٢} = ب_{٣٣} = \cdots = ب_{مم}$$

فتسمى المصفوفة عندها بالمصفوفة العددية . وهذه المصفوفة هي قطرية وأحادية مضروبة بعدد ثابت .

ملاحظة : أثر المصفوفة هو حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة

مربعة ، وللمصفوفة المربعة أثر رئيس (مجموع عناصر القطر الرئيس) وأثر ثانوي (مجموع عناصر القطر الثانوي) •

مثال :

$$ع_{(٤،٤)} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٥ \end{bmatrix} = ٥ \cdot ١_{(٤،٤)}$$

ثامنا : مصفوفة المتبادلات :

مصفوفة المتبادلات مصفوفة مربعة تساوي كل عناصرها الى الصفر ما عدا عنصر واحد يساوي الى الواحد في كل سطر وفي كل عمود ، اذن مجموع العناصر المساوية للواحد في مصفوفة متبادلات من المرتبة (ن،ن) يساوي الى (ن) •

نستخلص مصفوفة المتبادلات من المصفوفة الاحادية ، بعد تبديل ترتيب الاسطر والاعمدة مثال ، ذلك :

$$م_{(٥،٥)} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

حيث تنتج المصفوفة م من تبديل أسطر وأعمدة مصفوفة أحادية من المرتبة (٥،٥) ، هذا وان ضرب مصفوفة ب من جهة اليمين بمصفوفة متبادلات م يؤدي الى تبديل ترتيب أسطرها ، مثال :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_1 \\ \text{ب}_2 \\ \text{ب}_3 \\ \text{ب}_4 \\ \text{ب}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب}_2 \\ \text{ب}_5 \\ \text{ب}_4 \\ \text{ب}_1 \\ \text{ب}_3 \end{bmatrix}$$

أما ضرب المصفوفة حـ من جهة اليسار بمصفوفة متبادلات م فيؤدي الى تبديل في ترتيب أعمدتها ، مثال :

$$\begin{bmatrix} \text{حـ}_1 & \text{حـ}_2 & \text{حـ}_3 & \text{حـ}_4 & \text{حـ}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{حـ}_4 & \text{حـ}_1 & \text{حـ}_5 & \text{حـ}_3 & \text{حـ}_2 \end{bmatrix}$$

ان كل مصفوفة متبادلات هي مصفوفة نظامية لان أسطرها وأعمدتها مستقلة خطيا . وان كل مصفوفة متبادلات تقبل مدورها كمصفوفة معكوسة ، أي :

$$\text{م}^{-1} = \text{م}'$$

تاسعا ـ مصفوفة التبديل :

مصفوفة التبديل هي مصفوفة متبادلات مستنتجة من المصفوفة الاحادية أ بتبديل سطرين (أو عمودين) من أسطرها (أو أعمدتها)، مثال :

$$\text{ل}_{(5،5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث حصلنا على ل من أ بتبديل السطرين الثاني والخامس ، هذا وان ضرب مصفوفة ب من جهة اليمين أو من جهة اليسار بمصفوفة تبديل يؤدي الى تبديل سطريها أو عموديها • ونذكر هنا بأن مصفوفة التبديل لها مقلوب يساويها ، أي $ل^{-1} = ل$ وذلك لان مصفوفة التبديل هي مصفوفة متبادلات خاصة •

عاشرا : المصفوفة الماركوفية :

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها موجبة أو تساوي الصفر ، أي $ف_{رو} \geq ٠$ ، وحاصل جمع عناصر كل عمود فيها يساوي الواحد ،

أي : $\sum_{ر=١}^{ن} ف_{رو} = ١$

مثـال :

$$ف_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ٠ر٢ & ٠ر٤ \\ ٠ر٨ & ٠ر٦ \end{bmatrix}$$

$$ف_{(٣،٣)} = \begin{bmatrix} ٠ر١ & ٠ & ٠ر٥ \\ ٠ر٢ & ٠ر٨ & ٠ر١ \\ ٠ر٧ & ٠ر٢ & ٠ر٤ \end{bmatrix}$$

حيث $ف_{(٢،٢)}$ مصفوفة ماركوفية من المرتبة الثانية ، و $ف_{(٣،٣)}$ مصفوفة ماركوفية من المرتبة الثالثة • هذا ويمكن ذكر الملاحظتين التاليتين فيما يتعلق بالمصفوفة الماركوفية •

١ ــ اذا كانت المصفوفة ف مصفوفة ماركوفية ، فان $ف^{٢}$ ، $ف^{٣}$ ، $ف^{ن}$ (حيث ن عدد صحيح موجب) مصفوفات ماركوفية .

٢ ــ اذا كانت $ف_{١}$. $ف_{٢}$ مصفوفتين ماركوفيتين ، فان المصفوفات $ف_{١}^{ن}$. $ف_{٢}^{م}$ و $ف_{٢}^{م}$. $ف_{١}^{ن}$ (حيث ن ، م أعداد صحيحة موجبة) هي أيضا مصفوفات ماركوفية .

* * *

البحث الرابـع

الحل المصفوفي لجملة معادلات خطية

يستخدم التحليل النظري الذي قدمناه سابقا من الناحية العملية، لحل جملة معادلات خطية ، لذلك سنتعرض لدراسة المصفوفة من المرتبة الثانية واستعمالها لحل جملة معادلتين خطيتين ، ثم سندرس المصفوفة من المرتبة الثالثة وتطبيقها لحل جملة ثلاث معادلات خطية ، أي أن هذا البحث سيتضمن الموضوعين التاليين :

أولا : المصفوفة من المرتبة الثانية •

ثانيا : المصفوفة من المرتبة الثالثة •

اولا : المصفوفة من المرتبة الثانية :

سنناقش تحت هذا العنوان مؤشرات المصفوفة من المرتبة الثانية ثم الحل المصفوفي لجملة معادلتين خطيتين ثم خواص محددة المصفوفة من المرتبة الثانية ، ثم سننهي البحث بالتعرض للمعادلة المميزة لمصفوفة مربعة من المرتبة الثانية ، وبذلك يشمل تحليل المصفوفة من المرتبة الثانية النقاط التالية :

١ ــ مؤشرات المصفوفة من المرتبة الثانية •

٢ ـ الحل المصفوفي لجملة معادلتين خطيتين •

٣ ـ خواص محددة المصفوفة من المرتبة الثانية •

٤ ـ المعادلة المميزة لمصفوفة من المرتبة الثانية •

١ ـ مؤشرات المصفوفة من المرتبة الثانية :

بعد تعريف المصفوفة من المرتبة الثانية سنتطرق الى كيفية ايجاد المصفوفة المساعدة ومحددة المصفوفة وجداء المصفوفة بالمصفوفة المساعدة ومقلوب المصفوفة • وتعد المصفوفة المساعدة ومحددة المصفوفة ومقلوب المصفوفة أهم مؤشرات المصفوفة من المرتبة الثانية •

آ ـ تعريف : تتألف المصفوفة من المرتبة الثانية من أربعة عناصر موزعة على سطرين وعمودين وتأخذ الشكل العام التالي :

$$م_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ب & حـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$$

ب ـ المصفوفة المساعدة $\bar{م}$:

نحصل على المصفوفة المساعدة $\bar{م}$ بتبديل أماكن العنصرين ب ، هـ وبضرب العنصرين الباقيين حـ ، د بناقص واحد ، أي :

$$\bar{م} = \begin{bmatrix} هـ & -حـ \\ -د & ب \end{bmatrix}$$

مثال : لتكن المصفوفة :

$$\text{م}_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \bar{\text{م}}_{(٢،٢)} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

حـ ـ محددة المصفوفة :

لتكن لدينا المصفوفة من الدرجة الثانية :

$$\text{م} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$$

نعرف محددة المصفوفة ، ونرمز لها بـ Δ أو $|\text{م}|$ ، بالعلاقة التالية:

$$|\text{م}| = \Delta = \text{ب هـ} - \text{حـ د}$$

مثال :

$$\text{م} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix} \quad |\text{م}| = ٢ \times ٥ - ٣ \times -١$$
$$= ١٠ + ٣ = ١٣$$

د ـ جداء المصفوفة م بالمصفوفة المساعدة $\bar{\text{م}}$:

نحسب الجداء $\bar{\text{م}} \bullet \text{م}$

$$\bar{\text{م}} \bullet \text{م} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{هـ} & -\text{حـ} \\ -\text{د} & \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب هـ} - \text{حـ د} & \therefore \\ \therefore & \text{ب هـ} - \text{حـ د} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الجداء م • $\bar{م}$ لا يساوي المصفوفة الصفرية اذا كان
ب هـ − حـ د ≠ ٠ ، أي اذا كانت محددة المصفوفة لا تساوي الصفر •

بما أن جميع عناصر مصفوفة الجداء م • $\bar{م}$ تقبل القسمة على
ب هـ − حـ د فنضع هذه القيمة خارج المصفوفة كحد مشترك :

$$م • \tilde{م} = (ب هـ - حـ د) \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = (ب هـ - حـ د) أ_{(٢،٢)} = \Delta • أ_{(٢،٢)}$$

وعلى هذا فان الجداء م • $\bar{م}$ يساوي المصفوفة الصفرية اذا كانت
محددة المصفوفة :

$$ب هـ - حـ د = ٠$$

ففي المثال السابق :

$$م • \tilde{م} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ & ٠ \\ ٠ & ١٣ \end{bmatrix}$$

$$= ١٣ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ١٣ • أ_{(٢،٢)}$$

هـ ــ مقلوب المصفوفة :

تحقق المصفوفة المقلوبة م$^{-١}$ العلاقة التالية :

$$م • م^{-١} = أ_{(٢،٢)}$$

وحسب الفقرة السابقة فقد وجدنا أن :

$$م \cdot \bar{م} = \Delta \cdot I$$

وبتقسيم طرفي هذه العلاقة على Δ يكون :

$$م \cdot \frac{\bar{م}}{\Delta} = I$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة الاولى يكون :

$$م^{-1} = \frac{\bar{م}}{\Delta} = \frac{1}{|م|} \cdot \bar{م}$$

وعلى هذا فان مقلوب المصفوفة $م^{-1}$ يساوي الى جداء مقلوب المحددة في المصفوفة المساعدة $\bar{م}$ ، لذلك فيشترط لوجود مقلوب المصفوفة ألا تكون محددتها مساوية للصفر .

ان مقلوب المصفوفة :

$$م = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

يساوي الى :

$$م^{-١} = \frac{١}{١٣}\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{١٣} & \frac{-٣}{١٣} \\ \frac{١}{١٣} & \frac{٢}{١٣} \end{bmatrix}$$

أما الجداء $م \cdot م^{-١}$ فيساوي :

$$م \cdot م^{-١} = \frac{١}{١٣}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \frac{١}{١٣}\begin{bmatrix} ١٣ & ٠ \\ ٠ & ١٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = أ_{(٢،٢)}$$

٢ ـ الحل المصفوفي لجملة معادلتين خطيتين :

لتكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين :

$$ب\,س + حـ\,ع = و$$

$$د\,س + هـ\,ع = ل$$

حيث س ، ع متغيرات ب ، حـ ، د ، هـ ، و ، ل ثوابت .

يمكن كتابة هاتين المعادلتين بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{و} \\ \text{ل} \end{bmatrix}$$

فاذا رمزنا بـ م للمصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$ وكانت مصفوفتها المساعدة :

$$\text{م}^{-} = \begin{bmatrix} \text{هـ} & -\text{حـ} \\ -\text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$$

وضربنا من جهة اليمين بـ م^{-} الشكل المصفوفي للمعادلتين فاننا نحصل على :

$$\begin{bmatrix} \text{هـ} & -\text{حـ} \\ -\text{د} & \text{ب} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{هـ} & -\text{حـ} \\ -\text{د} & \text{ب} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{و} \\ \text{ل} \end{bmatrix}$$

ومنه $\begin{bmatrix} \text{ب هـ} - \text{حـ د} & ٠ \\ ٠ & \text{ب هـ} - \text{حـ د} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{هـ و} - \text{حـ ل} \\ -\text{د و} + \text{ب ل} \end{bmatrix}$

وبوضع ب هـ − حـ د خارج المصفوفة :

$$(\text{ب هـ} - \text{حـ د}) \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{هـ و} - \text{حـ ل} \\ -\text{د و} + \text{ب ل} \end{bmatrix}$$

ونميز بين الحالات الثلاث التالية :

الحالة الاولى : اذا كان ب هـ − حـ د ≠ ٠ (المحددة لاتساوي الصفر) أو $\frac{\text{ب}}{\text{د}} \neq \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}}$ فلجملة المعادلتين حل وحيد هو :

$$\text{س} = \frac{\text{هـ و} - \text{حـ ل}}{\text{ب هـ} - \text{حـ د}}$$

$$\text{ع} = \frac{-\text{د و} + \text{ب ل}}{\text{ب هـ} - \text{حـ د}}$$

الحالة الثانية : اذا كان ب هـ − حـ د = ٠ أو ($\frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}}$)

فينتج :

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{هـ و} - \text{حـ ل} \\ -\text{د و} + \text{ب ل} \end{bmatrix}$$

ومنـه : $\text{هـ و} - \text{حـ ل} = ٠$

$-\text{د و} + \text{ب ل} = ٠$

وينتج من هاتين المعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l} \text{هـ و} = \text{حـ ل} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} \\ \text{د و} = \text{ب ل} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} \end{array}\right\} \quad \frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}}$$

وجملة المعادلتين لا تقبل حلا محددا ، أي أن هناك عدم تعيين •

الحالة الثالثة :

اذا كان :

$هـ و - حـ ل \neq$ ٠

$- د و + ب ل \neq$ ٠ ونستنتج من ذلك :

$هـ و \neq حـ ل$ أو $\frac{و}{ل} \neq \frac{حـ}{هـ}$

$د و \neq ب ل$ أو $\frac{و}{ل} \neq \frac{ب}{د}$

وبما أن المحددة تساوي الصفر فان $\frac{ب}{د} = \frac{حـ}{هـ}$ ومن ذلك

ينتج أن : $\frac{ب}{د} = \frac{حـ}{هـ} \neq \frac{و}{ل}$

والمعادلتين مستحيلتا الحل •

وسنورد فيما يلي ثلاث أمثلة كتطبيق على الحالات السابقة •

الحالة الاولى :

لتكن جملة المعادلتين : ٣ س + ٧ع = ١٣
٢ س + ٥ع = ٩

نكتب بشكل مصفوفي :

$$\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ع \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

نحسب المحددة Δ = ٣ × ٥ − ٢ × ٧ = ١٥ − ١٤ = ١

المحددة لا تساوي الصفر ، فلجملة المعادلتين حل وحيد •

س = (٥ × ١٣ − ٧ × ٩) / (٣ × ٥ − ٢ × ٧) = (٦٥ − ٦٣) / ١ = ٢

ع = (− ٢ × ١٣ + ٣ × ٩) / (٣ × ٥ − ٢ × ٧) = (− ٢٦ + ٢٧) / ١ = ١

الحالة الثانية :

لتكن لدينا جملة المعادلتين :

٣ س + ٦ ع = ١٢

٢ س + ٤ ع = ٨

نكتب بشكل مصفوفي :

$$\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ع \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

نحسب المحددة : Δ = ٣ × ٤ − ٢ × ٦ = ٠

نلاحظ أن : و / ل = ١٢ / ٨ = ٣ / ٢

و $\frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} = \frac{٣}{٢}$

فهناك حالة عدم تعيين •

الحالة الثالثة :

$$\text{٣س} + \text{٦ع} = ٧$$

$$\text{٢س} + \text{٤ع} = ٥$$

نكتب بشكل مصفوفي :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

نحسب المحددة $\Delta = ٣ \times ٤ - ٢ \times ٦ = \therefore$

نلاحظ أن $\frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{٧}{٥}$

و $\frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} = \frac{٣}{٢}$

أي أن : $\frac{\text{و}}{\text{ل}} \neq \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

والمعادلتان مستحيلتا الحل •

وباختصار فلحل جملة معادلتين خطيتين من المرتبة الثانية (ذات مجهولين) تتبع الخطوات التالية :

١ ـ نكتب بشكل مصفوفي •

٢ ـ نحسب المحددة $\Delta = |م|$

٣ ـ نحسب المصفوفة المساعدة $\bar{م}$ •

٤ ـ نحسب مقلوب المصفوفة $م^{-1} = \frac{1}{|م|} \bar{م}$ •

٥ ـ نضرب بمقلوب المصفوفة من جهة اليمين $م^{-1}$ • م = أ

مثال : ٤س + ٣ ع = ٢

س − ٣ ع = ٨

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

Δ = ٤ × −٣ − ١ × ٣ = −١٢ − ٣ = −١٥

$$\bar{م} = \begin{bmatrix} ٣- & ٣- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$$

$$م^{-1} = \frac{1-}{15} \begin{bmatrix} ٣- & ٣- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$$

$$-\frac{١}{١٥}\begin{bmatrix} -٣ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = -\frac{١}{١٥}\begin{bmatrix} -٣ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

$$-\frac{١}{١٥}\begin{bmatrix} -١٥ & ٠ \\ ٠ & -١٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = -\frac{١}{١٥}\begin{bmatrix} -٣٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix}$$

ومنه : $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٢ \end{bmatrix}$

٣ ـ خواص محددة المصفوفة من المرتبة الثانية :

تتمتع محددة المصفوفة من المرتبة الثانية بالخواص التالية :

١ ـ لا تتغير قيمة محددة المصفوفة عندما نجعل أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطرا شريطة الحفاظ على ترتيب العناصر :

لتكن المصفوفة : م = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$

تساوي محددتها Δ = ب هـ − حـ د

لنجعل الاعمدة أسطر والاسطر أعمدة فنحصل على المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{د} \\ \text{حـ} & \text{هـ} \end{bmatrix}$$

ومحددة هذه المصفوفة Δ' = ب هـ − حـ د

نلاحظ اذن أن قيمة المحددة لم تتغير لان $\Delta = \Delta'$

٢ ـ اذا بادلنا في مصفوفة من المرتبة الثانية (م) بين السطرين (٢،٢)
أو بين العمودين فتتغير اشارة محددة المصفوفة الجبرية :

لتكن المصفوفة : $\text{م} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$

ومحددتها : $\Delta = \text{ب هـ} - \text{حـ د}$

بتبديل الاسطر : $\begin{bmatrix} \text{د} & \text{هـ} \\ \text{ب} & \text{حـ} \end{bmatrix}$

ومحددتها $\Delta' = \text{د حـ} - \text{ب هـ} = -(\text{ب هـ} - \text{د حـ}) = -\Delta$

وبتبديل الاعمـــدة : $\begin{bmatrix} \text{حـ} & \text{ب} \\ \text{هـ} & \text{د} \end{bmatrix}$

$\Delta'' = \text{حـ د} - \text{ب هـ} = -(\text{ب هـ} - \text{د حـ}) = -\Delta$

اذن : $\Delta = -\Delta' = -\Delta''$

٣ ـ اذا تطابق سطران أو عمودان في مصفوفة من المرتبة الثانية
فان محددتها تساوي الصفر :

$\text{م} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ} \end{bmatrix}$

$\Delta = \text{ب حـ} - \text{ب حـ} = \therefore$

$$م = \begin{bmatrix} ب & ب \\ د & د \end{bmatrix}$$

$$\Delta = ب\,د - ب\,د = ٠ \therefore$$

٤ ــ اذا ضربنا (أو قسمنا) جميع عناصر سطر من الاسطر (أو عمود من الاعمدة) بعدد ثابت (و) فان محددة المصفوفة تضرب (أو تقسم) بهذا العدد •

لتكن $م = \begin{bmatrix} ب & حـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$ حيث $\Delta = ب\,هـ - حـ\,د$

لنضرب عناصر السطر الاول بـ (و) فيكون :

$\begin{bmatrix} و\,ب & و\,حـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$ حيث $\Delta' = و\,ب \cdot هـ - و\,حـ \cdot د$

$$= \Delta' = و\,(ب\,هـ - حـ\,د) =$$

$$\Delta' = و \cdot \Delta$$

كذلك الامر اذا ضربنا عناصر العمود الاول بـ (و) •

$$\begin{bmatrix} و\,ب & حـ \\ و\,د & هـ \end{bmatrix}$$

حيث $\Delta'' = و\,ب \cdot هـ - حـ \cdot و\,د = و\,(ب\,هـ - حـ\,د)$

$$= و \cdot \Delta$$

٥ ــ اذا ضربنا (أو قسمنا) جميع عناصر مصفوفة من المرتبة

الثانية بعدد ثابت (و) فان محددة المصفوفة تضرب (أو تقسم) بمربع هذا العدد •

$$\text{م} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix} \quad \text{حيث } \Delta = \text{ب هـ} - \text{حـ د}$$

$$\begin{bmatrix} \text{وب} & \text{وحـ} \\ \text{و د} & \text{وهـ} \end{bmatrix} \quad \text{حيث } \Delta' = \text{و ب} \cdot \text{و هـ} - \text{و حـ} \cdot \text{و د}$$

$$\Delta' = \text{و}^2 \text{ب هـ} - \text{و}^2 \text{حـ د}$$

$$\Delta' = \text{و}^2 (\text{ب هـ} - \text{حـ د})$$

$$\Delta' = \text{و}^2 \cdot \Delta$$

٦ ــ لا تتغير قيمة محددة المصفوفة من المرتبة الثانية اذا أضفنا الى عناصر سطر (أو عمود) العناصر المقابلة لها من سطر (أو عمود) آخر مضروبة بعدد ثابت (و) :

لتكن المصفوفة :

$$\text{م} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$$

$$\text{حيث } \Delta = \text{ب هـ} - \text{حـ د} \cdot$$

لنضف الى عناصر السطر الاول عناصر السطر الثاني مضروبة بـ (و) ، فيكون :

$$\begin{bmatrix} \text{ب} + \text{و د} & \text{حـ} + \text{و هـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$$

$$\Delta' = (ب + و د) هـ - (حـ + و هـ) د$$

$$= ب هـ + و د هـ - حـ د + و هـ د$$

$$= ب هـ - حـ د = \Delta$$

لنضف الى عناصر العمود الثاني عناصر العمود الاول مضروبة بـ (و) :

$$\begin{bmatrix} ب & حـ + و ب \\ د & هـ + و د \end{bmatrix}$$

$$\Delta'' = ب (هـ + و د) - (حـ + و ب) د$$

$$= ب هـ + ب و د - حـ د - و ب د$$

$$= ب هـ - حـ د = \Delta$$

د ـ المعادلة المميزة لمصفوفة مربعة من المرتبة الثانية :

لتكن المصفوفة $م_{(ن،ن)}$ والشعاع العمودي $س_{(ن،١)}$ ، يمكن ملاحظة أن المساواة المصفوفية :

$$م \cdot س = و \cdot س = و \cdot أ \cdot س$$

أو المساواة $(م - و أ)$ س

لا تتحقق الا اذا كانت محددة المصفوفة $(م - و \cdot أ)$ مساوية للصفر • نسمي المعادلة المميزة للمصفوفة م معادلة منشور محددة

المصفوفة التي تجعل قيمة المحددة مساوية للصفر ، وهي معادلة من الدرجة (ن) بالنسبة الى (و) وتشكل جذور هذه المعادلة ما يسمى بالقيم الخاصة للمصفوفة م •

فاذا كانت لدينا المصفوفة :

$$م = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١٣ \end{bmatrix}$$

فنلاحظ أن محددة المصفوفة $\Delta = ٢\times١٣ - ٤\times٣ = ٢٦ - ١٢ = ١٤$ لاتساوي الصفر ، ويمكن الحصول على المعادلة المميزة للمصفوفة م بكتابة العلاقة التالية :

$$م - و \cdot أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} و & \cdot \\ \cdot & و \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ - و & ٤ \\ ٣ & ١٣ - و \end{bmatrix}$$

التي تعبر عن مصفوفة (م ـ و ٠ أ) محددتها تساوي الصفر ، أي :

$$\Delta = |م - و \cdot أ| = (٢ - و)(١٣ - و) - ٣\times٤ = و^{٢} - ١٥و + ١٤ = \cdot$$

تسمى المعادلة الاخيرة ، بالمعادلة المميزة للمصفوفة ، وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ و ، يساوي مميز هذه المعادلة ١٦٩ ولها جذران :

$$و_{١} = \frac{١٥ + ١٣}{٢} = ١٤ \quad ، \quad و_{٢} = \frac{١٥ - ١٣}{٢} = ١$$

وتشكل هاتان القيمتان و_1 ، و_2 ما يسمى بالقيم الخاصة للمصفوفة (م) وكذلك فان للمصفوفة م شعاعين خاصين يحققان العلاقتين :

$$\text{م} \cdot \text{س}_1 = \text{و}_1 \, \text{س}_1$$

$$\text{م} \cdot \text{س}_2 = \text{و}_2 \, \text{س}_2$$

ويمكن حساب عناصر الشعاع الخاص $\text{س}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ر}_1 \end{bmatrix}$ المرافق للقيمة الخاصة $\text{و}_1 = 14$ لتحقيقه العلاقة الاولى، وبتبديل و_1 بقيمتها :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ر}_1 \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ر}_1 \end{bmatrix}$$

$$2 + 4\,\text{ر}_1 = 14$$

$$3 + 13\,\text{ر}_1 = 14\,\text{ر}_1$$

اذن $\text{ر}_1 = 3$ ، $\text{س}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

وعناصر الشعاع $\text{س}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ر}_2 \end{bmatrix}$ المرافق للقيمة الخاصة $\text{و}_2 = 1$ لتحقيقه العلاقة الثانية ، وبتبديل و_2 بقيمتها :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{و}_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ر}_2 \end{bmatrix}$$

$$2 + 4\,\text{ر}_2 = 1$$

$$3 + 13\,\text{ر}_2 = \text{ر}_2$$

اذن : $ر_{٣} = -\frac{١}{٤}$

$$س_{٢} = \begin{bmatrix} ١ \\ -\frac{١}{٤} \end{bmatrix}$$

ثانيا : المصفوفة من المرتبة الثالثة :

تتطلب دراسة المصفوفة من المرتبة الثالثة التعرف على مؤشرات هذه المصفوفة وتطبيقها في ايجاد حل جملة ثلاث معادلات خطية ، ومن الضروري أيضا التعرف على أهم خواص محددة هــذه المصفوفة • لذلك سنتعرض في هذه الفقرة الى الموضوعات التالية :

١ ــ مؤشرات المصفوفة من المرتبة الثالثة •

٢ ــ الحل المصفوفي لجملة ثلاث معادلات خطية •

٣ ــ خواص محددة المصفوفة من المرتبة الثالثة •

١ ــ مؤشرات المصفوفة من المرتبة الثالثة :

بعد تعريف المصفوفة من المرتبة الثالثة سنتعرف على أهم مؤشرات هذه المصفوفة وهي المصغرات ، العوامل المشاركة ، محددة المصفوفة ، المصفوفة المساعدة ، مقلوب المصفوفة •

آ ــ تعريف : تأخذ المصفوفة من المرتبة الثالثة الشكل العــام التالي :

$$\underset{(٣،٣)}{ب} = \begin{bmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} & ب_{٣١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} & ب_{٣٢} \\ ب_{١٣} & ب_{٢٣} & ب_{٣٣} \end{bmatrix}$$

وتتألف من تسعة عناصر مرتبة في ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة .

ب ـ مصغر عنصر في مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة :

ليكن العنصر $ب_{رو}$ في مصفوفة $ب_{(ن،ن)}$ ، نسمي مصغر العنصر $ب_{رو}$ المحددة $\Delta_{رو}$ للمصفوفة المربعة من المرتبة (ن – ١) (ن – ١) التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الترتيب (ر) والعمود ذي الترتيب (و) في المصفوفة $ب_{(ن،ن)}$ ، تحسب مصغرات عناصر المصفوفة ب على النحو التالي :

مصغر العنصر $ب_{١١}$ هو محددة المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} ب_{٣٢} & ب_{٢٢} \\ ب_{٣٣} & ب_{٢٣} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{١١} = ب_{٢٢}\,ب_{٣٣} - ب_{٣٢}\,ب_{٢٣}$$

مصغر العنصر $ب_{٢١}$ هو محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} ب_{٣٢} & ب_{١٢} \\ ب_{٣٣} & ب_{١٣} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = ب_{21}\ ب_{12}\ ب_{33} - ب_{13}\ ب_{32}$$

مصغر العنصر $ب_{31}$ هو محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} ب_{12} & ب_{22} \\ ب_{13} & ب_{23} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = ب_{31}\ ب_{12}\ ب_{23} - ب_{22}\ ب_{13}$$

وهكذا ...

حـ ـ العامل المشارك لعنصر في مصفوفة مربعة :

يعرف العامل المشارك للعنصر $ب_{رو}$ في مصفوفة مربعة $ب_{(ن،ن)}$ بأنه جداء مصغر العنصر $ب_{رو}$ في الاشارة الجبرية $(-1)^{ر+و}$ فاذا رمزنا للعامل المشارك للعنصر $ب_{رو}$ بـ $[ب]_{رو}$ فيمكننا أن نكتب :

$$[ب\,ر\,و] = (-1)^{ر+و}\ \Delta_{رو}$$

د ـ منشور محددة المصفوفة المربعة :

نسمي منشور محددة المصفوفة $ب_{(ن،ن)}$ التي حدها العام $ب_{رو}$

حسب السطر (ر) بالعلاقة التالية :

$$\text{ب}_{\text{ر١}}(\text{ب})_{\text{ر١}} + \text{ب}_{\text{ر٢}}(\text{ب})_{\text{ر٢}} + \cdots + \text{ب}_{\text{رو}}(\text{ب})_{\text{رو}} + \cdots + \text{ب}_{\text{رن}}(\text{ب})_{\text{رن}}$$

فاذا رمزنا بـ $|\text{ب}| = \Delta$ لهذه المحددة فيكون :

$$|\text{ب}| = \Delta = \sum_{\text{و}=١}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{رو}}(\text{ب})_{\text{رو}}$$

كما يمكن تعريف منشور محددة المصفوفة التي حدها العام $\text{ب}_{\text{رو}}$

حسب العمود (و) بالعلاقة التالية :

$$|\text{ب}| = \Delta = \text{ب}_{\text{١و}}(\text{ب})_{\text{١و}} + \text{ب}_{\text{٢و}}(\text{ب})_{\text{٢و}} + \cdots + \text{ب}_{\text{رو}}(\text{ب})_{\text{رو}} + \cdots + \text{ب}_{\text{نو}}(\text{ب})_{\text{نو}}$$

$$|\text{ب}| = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{رو}}(\text{ب})_{\text{رو}}$$

هذا ويمكن حساب منشور المحددة بصورة عملية وسريعة وفق الطريقة المسماة بطريقة سيروس فاذا عدنا الى منشور المحددة وفق عناصر السطر الاول لوجدنا أنه يساوي الى :

$$|\text{ب}| = \text{ب}_{١١}(\text{ب}_{٢٢}\text{ب}_{٣٣} - \text{ب}_{٣٢}\text{ب}_{٢٣}) - \text{ب}_{٢١}(\text{ب}_{١٢}\text{ب}_{٣٣} - \text{ب}_{٣٢}\text{ب}_{١٣}) + \text{ب}_{٣١}(\text{ب}_{١٢}\text{ب}_{٢٣} - \text{ب}_{٢٢}\text{ب}_{١٣})$$

$$= \text{ب}_{١١}\text{ب}_{٢٢}\text{ب}_{٣٣} - \text{ب}_{١١}\text{ب}_{٣٢}\text{ب}_{٢٣} - \text{ب}_{٢١}\text{ب}_{١٢}\text{ب}_{٣٣} + \text{ب}_{٢١}\text{ب}_{٣٢}\text{ب}_{١٣} + \text{ب}_{٣١}\text{ب}_{١٢}\text{ب}_{٢٣}$$

$$- \text{ب}_{٣١}\text{ب}_{٢٢}\text{ب}_{١٣}$$

$$= \text{ب}_{١١}\,\text{ب}_{٢٢}\,\text{ب}_{٣٣} + \text{ب}_{٢١}\,\text{ب}_{٣٢}\,\text{ب}_{١٣} + \text{ب}_{٣١}\,\text{ب}_{١٢}\,\text{ب}_{٢٣} - (\text{ب}_{١١}\,\text{ب}_{٣٢}\,\text{ب}_{٢٣} +$$

$$\text{ب}_{٢١}\,\text{ب}_{١٢}\,\text{ب}_{٣٣} + \text{ب}_{٣١}\,\text{ب}_{٢٢}\,\text{ب}_{١٣})$$

ان الحدود الموجبة يمكن الحصول عليها بكتابة عناصر المصفوفة ب ثم باضافة العمود الاول والثاني من جهة اليسار وضرب العناصر باتجاه الاسهم •

$$\begin{array}{ccccc}
\text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٣١} & \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} \\
\text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{٣٢} & \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} \\
\text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣} & \text{ب}_{٣٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣}
\end{array}$$

$$\text{ب}_{١١}\,\text{ب}_{٢٢}\,\text{ب}_{٣٣} + \text{ب}_{٢١}\,\text{ب}_{٣٢}\,\text{ب}_{١٣} + \text{ب}_{٣١}\,\text{ب}_{١٢}\,\text{ب}_{٢٣}$$

أما الحدود السالبة فنحصل عليها بضرب العناصر وفق اتجاه الاسهم المعاكس :

$$\begin{array}{ccccc}
\text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٣١} & \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} \\
\text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{٣٢} & \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} \\
\text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣} & \text{ب}_{٣٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣}
\end{array}$$

$$\text{ب}_{٣١}\,\text{ب}_{٢٢}\,\text{ب}_{١٣} + \text{ب}_{١١}\,\text{ب}_{٣٢}\,\text{ب}_{٢٣} + \text{ب}_{٢١}\,\text{ب}_{١٢}\,\text{ب}_{٣٣}$$

وبطرح مجموع الحدود السالبة من مجموع الحدود الموجبة نحصل على منشور المحددة •

هـ ـ المصفوفة المساعدة ومقلوب المصفوفة :

نعرف المصفوفة المساعدة للمصفوفة $ب_{(ن،ن)}$ التي حدها العام $ب_{رو}$

ونرمز لها بـ $\bar{ب}_{(ن،ن)}$ بأنها مدور مصفوفة العوامل المشاركة ، أي :

$$\bar{ب} = \left(ب'_{رو}\right)_{(ن،ن)}$$

واذا كانت محددة المصفوفة لا تساوي الصفر فيعرف معكوس أو مقلوب المصفوفة بالعلاقة التالية :

$$ب^{-١} = \frac{١}{|ب|}\,\bar{ب}$$

أي أنه جداء مقلوب المحددة في المصفوفة المساعدة •

٢ ـ الحل المصفوفي لجملة ثلاث معادلات خطية :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية :

$$ب_{١١}س + ب_{٢١}ع + ب_{٣١}ص = و$$

$$ب_{١٢}س + ب_{٢٢}ع + ب_{٣٢}ص = ل$$

$$ب_{١٣}س + ب_{٢٣}ع + ب_{٣٣}ص = م$$

يمكن كتابة هذه المعادلات بشكل مصفوفي :

$$\begin{bmatrix} \text{و} \\ \text{ل} \\ \text{م} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{٣١} & \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} \\ \text{ب}_{٣٢} & \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} \\ \text{ب}_{٣٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣} \end{bmatrix}$$

أو

$$\underset{(١،٣)}{\text{ق}} = \underset{(١،٣)}{\text{ص}} \cdot \underset{(٣،٣)}{\text{ب}}$$

لنحسب معكوس المصفوفة ب ولنضرب به المعادلة المصفوفية السابقة من جهة اليمين :

$$\underset{(١،٣)}{\text{ق}} \cdot \underset{(٣،٣)}{\text{ب}^{-١}} = \underset{(١،٣)}{\text{ص}} \cdot \underset{(٣،٣)}{\text{ب}} \cdot \underset{(٣،٣)}{\text{ب}^{-١}}$$

$$\text{أو} \quad \underset{(١،٣)}{\text{ك}} = \underset{(١،٣)}{\text{ص}} \cdot \text{أ}$$

$$\underset{(١،٣)}{\text{ك}} = \underset{(١،٣)}{\text{ص}}$$

وبذلك نحسب المجاهيل الثلاثة المشكلة لعناصر الشعاع ص .

وبصورة عملية لحل جملة ثلاث معادلات خطية تتبع الخطوات التالية اعتمادا على أرقام المثال الآتي :

٢ س + ٦ع − ٤ ص = ١

٤ س + ٢ ع + ٣ ص = − ٥

٣ س − ع + ص = ٣

آ ــ كتابة المعادلات الخطية بشكل مصفوفي :

نكتب بشكل مصفوفي :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & -٤ \\ ٤ & ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

ب ــ حساب منشور المحددة

نحسب منشور المحددة استنادا الى أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة ب ، ويساوي منشور المحددة الى مجموع جداءات عناصر السطر أو العمود بالعوامل المشاركة لهذه العناصر •

فبالنسبة لعناصر السطر الاول تكون المصغرات كما يلي :

$$\Delta_{١١} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - (٣ \times -١) = ٥$$

$$\Delta_{٢١} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٤ - ٩ = -٥$$

$$\Delta_{٣١} = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٤ - ٦ = -١٠$$

ثم نحسب العوامل المشاركة $ب_{رو}$ بأخذ الإشارات الجبرية بعين الاعتبار :

$$(ب)_{١١} = (-١)^{٢} \times ٥ = ٥$$

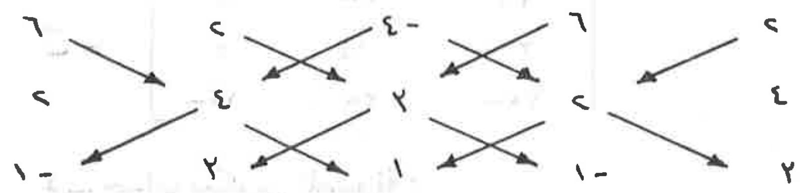
$$(ب)_{٢١} = (-١)^{٣} \times -٥ = ٥$$

$$(ب)_{٣١} = (-١)^{٤} \times -١٠ = -١٠$$

ثم نضرب العناصر المشاركة $(ب)_{رو}$ بالعناصر $ب_{رو}$ ونجمع فنحصل على المحددة :

$$|ب| = \Delta = ٢ \times ٥ + ٦ \times ٥ + (-٤)(-١٠) = ١٠ + ٣٠ + ٤٠ = ٨٠$$

وبتطبيق طريقة سيروس على أرقام المصفوفة يكون :



$$|ب| = (٢ \times ٢ \times ١ + ٦ \times ٣ \times ٣ + ٤ \times ٤ \times ١) -$$

$$(٦ \times ٤ \times ١ + ٢ \times ٣ (-١) + (-٤) \times ٢ \times ٣)$$

$$= (٤ + ٥٤ + ١٦) - (٢٤ - ٦ - ٢٤) = ٧٤ + ٦ = ٨٠$$

حـ ــ حساب المصفوفة المساعدة $\tilde{ب}$:

تعرف المصفوفة المساعدة $\tilde{ب}$ بأنها مدور مصفوفة العوامل المشاركة $ب_{رو}$ لعناصر المصفوفة ب أي :

$$\tilde{ب} = (ب_{رو})'$$

$$(ب_{رو}) = \begin{bmatrix} -١٠ & ٥ & ٥ \\ ٢٠ & ١٤ & -٢ \\ -٢٠ & -٢٢ & ٢٦ \end{bmatrix}$$

وبتدوير المصفوفة $(ب_{رو})$ يكون :

$$\tilde{ب} = \begin{bmatrix} ٢٦ & -٢ & ٥ \\ -٢٢ & ١٤ & ٥ \\ -٢٠ & ٢٠ & -١٠ \end{bmatrix}$$

د ــ حساب معكوس المصفوفة :

يعرف معكوس المصفوفة أو مقلوبها بالعلاقة :

$$ب^{-١} = \frac{١}{|ب|} \tilde{ب}$$

أي :

$$ب^{-1} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٢٦ \\ ٥ & ١٤ & -٢٢ \\ -١٠ & ٢٠ & -٢٠ \end{bmatrix}$$

هـ ـ حساب عناصر الشعاع ص :

ان ضرب المصفوفة ب بمقلوبها يعطي المصفوفة الاحادية ، وبما أن هذه المصفوفة حيادية بالنسبة لعملية الضرب ، فيبقى في الطرف الثاني $ب^{-1}$ • ق •

$$\begin{bmatrix} س \\ ع \\ ص \end{bmatrix} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٢٦ \\ ٥ & ١٤ & -٢٢ \\ -١٠ & ٢٠ & -٢٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{93}{80} \\ -\frac{131}{80} \\ -\frac{170}{80} \end{bmatrix}$$

٣ ـ خواص محددة المصفوفة من المرتبة الثالثة :

تتصف محددة المصفوفة من المرتبة الثالثة بالخواص التالية :

آ ـ لا تتغير قيمة محددة المصفوفة من المرتبة الثالثة اذا جعلنا فيها الاسطر أعمدة والاعمدة أسطر مع مراعاة الترتيب في التبديل •

ب ـ اذا بادلنا في مصفوفة من المرتبة الثالثة بين سطرين (أو

عمودين) من أسطرها (أو أعمدتها) فان محددة المصفوفة الناتجة تساوي الى محددة المصفوفة الاصلية مضروبة في ناقص واحد •

حـ ــ اذا تطابق في مصفوفة سطران أو عمودان فان محددة المصفوفة تساوي الصفر •

د ــ اذا ضربنا عناصر أحد أسطر (أو أحد أعمدة) مصفوفة من المرتبة الثالثة بعدد ثابت ، فان محددة المصفوفة الناتجة تساوي الى العدد الثابت مضروبا في محددة المصفوفة الاصلية •

هـ ــ اذا كانت عناصر سطر (أو عمود) من مصفوفة من المرتبة الثالثة تساوي الى عناصر سطر آخر (أو عمود آخر) مضروبة بعدد مشترك فان محددة هذه المصفوفة تساوي الصفر •

تطبيقات عملية

١ ــ لتكن المصفوفتان :

$$\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ & ٤ \\ ٢ & ١ & -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٤ & ٣ \\ ٣ & ٠ & ٥ & ١ \\ -١ & ٣ & -٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{حـ}$$

والمطلوب حساب :

ب + حـ ، ب – حـ ، ٣ب ، – ب

٢ ــ أوجد حواصل الضرب التالية :

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ -١ \end{bmatrix}$$

٣ ــ أوجد مقلوب المصفوفتين التاليتين :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

٤ ــ أوجد حلولا لمجموعة المعادلات التالية باستخدام مقلوب المصفوفة :

س + ٤ ع + ٣ ص = ١
٢ س + ٥ ع + ٤ ص = ٤
س − ٣ ع − ٢ ص = ٥

س + ع + ٢ ص = ٤
٢ س + ٥ ع − ٢ ص = ٣
س + ٧ غ − ٧ ص = ٥

٥ ــ برهن أن المصفوفة :

$$ب = \begin{bmatrix} -٤ & -٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ & -١ \\ -٣ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

متساوية القوى •

٦ ــ برهن أن المصفوفة :

$$د = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٥ \\ -٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$$

انعدامية وحدد درجة انعداميتها •

٧ ــ برهن أن المصفوفة هـ قاسم للصفر :

$$هـ = \begin{bmatrix} -٥ & -٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \\ -٤ & -٣ & ١ \end{bmatrix}$$

٨ ــ لتكن المصفوفات :

$$ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \qquad حـ = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$$

والمطلوب :

آ ــ احسب ب + حـ ، ب − حـ ، ٢ب − ٣ حـ

ب ــ اكتب المصفوفتين بَ ، حـَ •

جـ ــ احسب ب حـَ ، بَ حـ ، ب بَ ، بَ ب ، حـ حـَ ، حـَ حـ

٩ ــ برهن أن الاشعة التالية مستقلة زوجا زوجا :

س = [١   ٢]

ع = [٠   −١]

ص = [٢   −١]

١٠ ــ لتكن المصفوفة المربعة :

م = $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$

والمطلوب :

أ ــ احسب $م^{٢}$ وتحقق أن $م^{٢}$ من الشكل $م^{٢}$ = د•م ثم احسب د•

ب ــ احسب $م^{٣}$ ، $م^{٤}$ بدلالة م و د •

جـ ــ استنتج $م^{ن}$ بدلالة م و (ن) و (د) معتمدا على النتائج السابقة •

١١ ــ لتكن المصفوفة :

$$ع = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ -١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ــ بين أن هذه المصفوفة انعدامية ، واحسب درجة انعداميتها .

١٢ ــ لتكن المصفوفة

$$س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$$

أ ــ احسب سَ وقارنها بـ س :

ب ــ احسب س^{٢} ، ما هو شكل هذه المصفوفة .

١٣ ــ لتكن المصفوفتين القطريتين :

$$ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \quad حـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

والمطلوب :

أ ــ احسب الجداء ب • حـ ثم حـ • ب وبين شكل المصفوفتين الناتجتين .

ب ــ اذا علمت أن ب$^{-١}$ ، حـ$^{-١}$ مصفوفتان قطريتان ، حدد هاتين المصفوفتين .

المراجع العربية

١ ـ ا. سوفورف

الرياضيات العالية للمدارس الفنية ، دار مير للطباعة والنشر ، موسكو ١٩٦٩ .

٢ ـ فرانك ايرز

المصفوفات ، دار ماكجرو هيل للنشر ، القاهرة ١٩٧٧ .

٣ ـ د. محمد عادل سودان

الموجز في الرياضيات ، نظرية المجموعات ، المطبعة التعاونية ، دمشق ١٩٧٢ .

الرياضيات العامة ، الاجزاء ١ ـ ٣ ، دار العلوم للطباعة والنشر ، دمشق ١٩٦٦ .

٤ ـ د. محمد عادل سودان ـ د. موفق دعبول

الجبر ، مكتبة دار الفتح ، دمشق ١٩٦٤ .

٥ ـ د. ممدوح الخطيب الكسواني

الرياضيات العالية ، جامعة دمشق ، ١٩٨٢

الاقتصاد الرياضي ، جامعة دمشق ، ١٩٨٢ .

المراجع الاجنبية

1 - **E. BERREBI**

Mathématique, Exercices Corrigés
Tome 1 - 2 - 3 . Dunod , Paris , 1967.

2 - **J. BOUZITAT**

Eléments de mathématiques
Librairie Dey , Paris , 1967.

3 - **A. CHIANG**

Fundamental Methods of Mathematical Economics.
Mc. Grow Hill , Tokyo , 1974.

4 - **M. GIRAULT**

Mathématiques , 2e année de Licence.
Mathématiques , 3e année de Licence.
Librairie Dey , Paris , 1974.

5 - **G. Th. GUILBAUD**

Mathématiques préparatoires à l'économie
P. U. F. Paris , 1966.

6 - **Y. H. C. LISMAN**

Mathématiques préparatoires à l'économie.
Dunod , Paris , 1972.

7 - **G. TINTNER**

Mathématiques et statistiques pour les économistes.
Dunod, Paris , 1965.

الفهرس

الصفحـة

الصفحة

الصفحـة

الصفحة

الصفحة